Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão

PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES
Condições Dinâmicas

Nélia Maria dos Santos Rodrigues da Câmara

Orientador
Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Constituição do júri
Presidente: Dr. António José Gregório Luis
Vogal: Doutor Tiago Praça Nunes Mexia
Vogal: Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia

Abril de 1996

Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão

PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES
Condições Dinâmicas

Tese de Mestrado orientada pelo Dr. Jorge Manuel Afonso Garcia
e apresentada pela licenciada Nélia Maria dos Santos Rodrigues da Câmara
no Instituto Superior de Economia e Gestão para obtenção do grau de
Mestre em Actuariado e Gestão de Riscos Financeiros

Abril de 1996

Aos meus Pais

(A quem muito devo)

Ao Rui

(Por tudo...)

ÍNDICE

Anexos:

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

Agradeço,

À minha família, e em especial ao meu marido e à minha mãe, pela paciência e apoio demonstrados durante a elaboração desta dissertação;

À minha grande amiga, Maria João Marques Benoliel, pela amizade e companheirismo;

Aos meus amigos e ex-colegas do Instituto de Seguros de Portugal, Dra Maria Amélia Vicente e Dr Gabriel Bernardino, por tudo aquilo que me ensinaram na área dos Fundos de Pensões;

Ao meu orientador, Dr Jorge Garcia, pela disponibilidade no esclarecimento de dúvidas surgidas na elaboração deste trabalho;

E, finalmente, a todos os restantes amigos e colegas pelo incentivo e interesse manifestado no decurso da realização desta dissertação.

- reforma antecipada ou pré-reforma
- abandono da empresa

Para $x \geq r$ a única causa possível de saída é a morte.

O Plano de Pensões em estudo será de benefício definido e sem direitos adquiridos. As pensões são pagas directamente através do Fundo de Pensões, ou seja, quando um indivíduo atinge a idade r a responsabilidade não é transferida para uma seguradora através da compra de rendas vitalícias imediatas.

3. AVALIAÇÃO ACTUARIAL

A avaliação actuarial dum plano de pensões de benefício definido consiste na determinação das responsabilidades inerentes a esse plano num determinado momento e de acordo com um determinado método de financiamento. Para a sua realização é necessário saber as características da população abrangida e os pressupostos actuariais e financeiros a utilizar.

Assim uma avaliação actuarial permite obter:

- o Custo Anual e a Responsabilidade Actuarial
- um esquema de custos, a curto, médio e longo prazo

e os seus objectivos são os seguintes:

- preparar relatórios actuariais para os promotores do plano
- definir níveis de financiamento
- reajustar parâmetros
- permitir eventuais alterações dos benefícios a garantir
- alterar contribuições em função de valores reais verificados face aos valores previstos e à situação financeira da empresa
- contribuir para a avaliação de uma empresa uma vez que permite quantificar as suas responsabilidades com pensões
- analisar a evolução dos valores obtidos
- verificar o nível de financiamento do Fundo Mínimo exigido pela legislação em vigor, quando o plano de pensões é financiado por um Fundo de Pensões.

Mas para a realização de uma avaliação é necessário saber algumas das características da população abrangida pelo plano, que de um modo geral estão enumeradas de seguida:

Activos:

- Número/Nome
- Sexo
- Data de nascimento
- Data de admissão na empresa
- Data de admissão na Segurança Social (se o plano depende de algum modo da Segurança Social)

- Salário sobre o qual incide o cálculo do beneficio
- Salário declarado para a Segurança Social
- Data de nascimento do cônjuge e filhos se o plano tiver sobrevivência
- Situação fiscal

Reformados e Pensionistas:

- Número/Nome
- Tipo: Reformado, Viuva(o) ou Órfão, Pré-reforma
- Valor da pensão
- Data de nascimento do cônjuge

Dos pressupostos utilizados realçam-se os seguintes:

- Tábua de Mortalidade
- Tábua de Invalidez
- Tábua de Turnover
- Taxa de rendimento do Fundo
- Taxa técnica actuarial[3]
- Taxa de crescimento salarial de longo prazo
- Taxa de crescimento salarial para o cálculo da pensão da Segurança Social
- Taxa de crescimento das pensões
- Idade Normal de reforma

Repare-se que para um indivíduo cuja idade de entrada para o plano é de 25 anos o período activo é de 40 anos enquanto o período de reforma poderá ser, por exemplo, de 16 anos se considerarmos a Tábua de Mortalidade PF 60/64. Podemos pois concluir que estes cálculos envolvem períodos muito longos para a projecção dos benefícios futuros sendo pois aconselhável fazer avaliações actuariais periódicas, tendo em conta a envolvente macro-económica de maneira a tentar definir os pressupostos actuariais e financeiros da forma mais precisa possível.

Uma vez que as avaliações actuariais abrangem largos períodos de tempo é importante ter muito cuidado na escolha dos pressupostos actuariais e financeiros de longo prazo e não se deixar influenciar pela conjuntura actual, já que alterações nas variáveis macro-económicas podem levar a grandes desvios nos valores estimados para os custos.

No entanto o actuário terá oportunidade de rever estes pressupostos na próxima avaliação, podendo existir ajustamentos no futuro na perspectiva dum *déficit* ou *superavit*.

[3] A taxa técnica actuarial é também uma taxa de rendimento do fundo mas apenas utilizada durante o período de reforma, enquanto que a taxa de rendimento do fundo é utilizada no período activo.

4. HIPÓTESES CONSIDERADAS

Neste capítulo vamos considerar as seguintes hipóteses:

- A população é estacionária desde a implantação do plano
- Os activos e os reformados seguem a mesma função l_x, que representa o número de indivíduos com idade x
- A função l_x é uma função contínua
- Não existe qualquer distinção entre mulheres e homens
- As entradas para o plano ocorrem continuamente
- A taxa e a força de capitalização, respectivamente i e δ, são constantes
- a e r são idades únicas
- A actualização verificada na pensão desde a idade r até à idade x é representada por $h(x)$ com $h(r) = 1$ e $h(x) = 0$ para $x < r$
- Os cálculos são feitos no início do ano
- As pensões são pagas antecipadamente

CONCEITOS ACTUARIAIS

Em Portugal ainda não existe uma terminologia própria para os conceitos actuariais utilizados na área dos Fundos de Pensões. Assim, achamos que seria útil neste trabalho definir esses conceitos actuariais com designações portuguesas não só por uma questão de melhor compreensão do trabalho, mas também porque este estudo pode ser um ponto de discussão para a elaboração dum glossário de conceitos actuariais portugueses[4] na área dos Fundos de Pensões.

Dividimos estes conceitos em dois grupos: o primeiro inclui aqueles que se referem individualmente a cada participante enquanto que o segundo inclui os conceitos que se referem ao grupo de participantes. Na notação utilizaremos $\underline{x}$ para indicar que se trata dum cálculo feito para um membro que entrou para o plano à idade a e tem idade x no instante t e utilizaremos $\underline{t}$ para indicar que o cálculo foi feito no instante t, para todos os membros.

1. APLICADOS INDIVIDUALMENTE A CADA MEMBRO DO PLANO DE PENSÕES

1.1. Acréscimo de Benefício e Benefício Acrescido Acumulado

Vamos supor que o valor da pensão a receber à idade r é B_r. Seja $b_y dy$ o acréscimo de benefício à idade y com $a \le y \le r$ de modo a que

$$B_r = \int_a^r b_y dy \tag{1}$$

O valor acumulado dos acréscimos de benefício até à idade x, para $a \le x \le r$, tem a forma

$$B_x = \int_a^x b_y dy \tag{2}$$

1.2. Valor Actual dos Benefícios Totais

O Valor Actual dos Benefícios Totais, BT, representa o montante que seria necessário, actualmente, para cobrir os benefícios futuros concedidos aos membros dum determinado plano. Teoricamente, o valor do Fundo num determinado instante será suficiente para cobrir todos os benefícios prometidos pelo plano se for igual ao BT calculado nesse mesmo instante. Na prática isto só se verificará se não existirem alterações no plano e se as supostas condições actuariais e financeiras se verificarem. No BT serão incluídos todos os benefícios que estejam garantidos pelo plano, como por exemplo invalidez e direitos adquiridos. A expressão matemática da função BT para um indivíduo de idade x, tendo por hipótese apenas o benefício por velhice, resulta de

[4] No Anexo II faz-se a correspondência entre os conceitos actuariais aqui definidos em português e os termos em inglês.

$$(BT)_x = \begin{cases} v^{r-x}\, {}_{r-x}p_x B_r \bar{a}_r^h & \Leftarrow x < r \\ B_r \bar{a}_x^h & \Leftarrow x \geq r \end{cases} \tag{3}$$

onde

${}_{r-x}p_x$ = probabilidade do indivíduo x ainda estar ao serviço quando atingir r anos (tendo em conta os vários decrementos envolvidos)

$\bar{a}_r^h$ = anuidade vitalícia contínua actualizada a uma função $h(x)$

$v = (1+i)^{-1}$

1.3. Custo Normal

O Custo Normal, CN, representa, em geral, a porção do BT a amortizar num determinado ano, podendo este custo estar associado a um só membro ou ao grupo de participantes, dependendo do método em estudo. Esta amortização é realizada durante o período activo dos membros do plano, ou seja, o valor acumulado destes custos à idade r será igual a $(BT)_r$ e $(CN)_x = 0$ *para* $x \geq r$.

Poderemos escrever o $(BT)_x$ em função dos CN:

$$(BT)_x = (CNP)_x + (CNF)_x \tag{4}$$

com

$(CNP)_x$ = Valor actual dos Custos Normais passados, ou seja anteriores a x

$$= \int_a^x (1+i)^{x-y} \frac{1}{{}_{x-y}p_y}\left[(CN)_y - B_r h(y)\right] dy \tag{5}$$

$(CNF)_x$ = Valor actual dos Custos Normais futuros, ou seja posteriores a x

$$= \int_x^r v^{y-x}\, {}_{y-x}p_x (CN)_y dy \tag{6}$$

1.4. Responsabilidade Actuarial

A Responsabilidade Actuarial, ***RA***, associada a um determinado participante de idade x é igual a porção do BT, actualizada para a idade x, que já está teoricamente amortizada a essa idade.

De um modo prospectivo, a RA é igual à diferença entre o Valor Actual dos Benefícios Totais e o Valor Actual dos Custos Normais Futuros,

$$(RA)_x = (BT)_x - (CNF)_x \tag{7}$$

Retrospectivamente, teria

$$(RA)_x = (CNP)_x \tag{8}$$

Facilmente se verifica através de (7) e (8) que $(RA)_r = (BT)_r$ e que $(RA)_a = 0$.

Para $x \geq r$, a RA representa o valor actual das pensões que ainda faltam pagar ao indivíduo (x).

1.5. Responsabilidade Suplementar

Teoricamente, como podemos verificar através das fórmulas (7) e (8), calcular a Responsabilidade Actuarial de um modo prospectivo ou retrospectivo dará o mesmo resultado. No entanto, na prática existe uma discrepância entre estes dois cálculos. A esta diferença, que representamos por $\boldsymbol{(RS)_x}$, designamos Responsabilidade Suplementar. Então

$$(RS)_x = \left[(BT)_x - (CNF)_x\right] - (CNP)_x \tag{9}$$

No início designamos esta responsabilidade por Responsabilidade Inicial, que corresponde ao período anterior à implementação do plano. A Responsabilidade Suplementar pode resultar da parte ainda não amortizada da Responsabilidade Inicial, como ainda ser constituída, por exemplo, por variações ocorridas na população não coincidentes com as Tábuas utilizadas.

1.6. Custo Suplementar

A amortização da Responsabilidade Suplementar pode ser feita totalmente no ano em que é criada ou estender-se por um período de anos não superior aos que ainda restam ao indivíduo na qualidade de activo, designando-se o valor dessa amortização por Custo Suplementar.

Teremos a relação

$$(RS)_x = (CSP)_x + (CSF)_x \tag{10}$$

com

$\boldsymbol{(CSP)_x}$ = Valor Actual dos Custos Suplementares passados, ou seja anteriores a x

$\boldsymbol{(CSF)_x}$ = Valor Actual dos Custos Suplementares futuros, ou seja posteriores a x

Através de (9) e (10) obtemos

$$(BT)_x = \left[(CNP)_x + (CSP)_x\right] + \left[(CNF)_x + (CSF)_x\right] \tag{11}$$

Repare-se que a expressão (11) se transforma em (4) se não existir Responsabilidade Suplementar à idade x.

1.7. Custo Anual

O Custo Anual $\boldsymbol{(CA)}$ representa a soma do Custo Normal com o Custo Suplementar, ou seja

$$(CA)_x = (CN)_x + (CS)_x \tag{12}$$

2. APLICADOS A TODOS OS MEMBROS DO PLANO DE PENSÕES

Os conceitos referidos no ponto 1 são também aplicados à totalidade dos membros através da soma, para todos os indivíduos, dos correspondentes valores individuais. É excepção o Custo Normal que dependendo do método em estudo, é calculado globalmente através de um valor médio actuarial.

Para se distinguir se os conceitos descritos anteriormente correspondem a um indivíduo ou à totalidade dos membros do plano a notação destes conceitos incluirá x ou t em *subscript* caso se trate do primeiro ou segundo caso.

Teremos ainda que incluir neste ponto os seguintes conceitos:

2.1. Contribuição Anual

A Contribuição Anual no ano t, C_t, corresponde ao total de entregas realizadas durante esse ano para financiamento das responsabilidades do plano.

2.2. Valor do Fundo

O Valor do Fundo no instante t, F_t, representa o valor dos activos que integram o património do fundo, avaliados de acordo com uma determinada valorimetria e que servirá para fazer face às responsabilidades do plano de pensões.

2.3. Responsabilidade Actuarial não financiada

Corresponde à diferença, se positiva, entre a RA, calculada para todos os membros no momento t, e o Valor do Fundo nesse instante:

$$\overline{(RA)}_t = (RA)_t - F_t \tag{13}$$

Se esta diferença for negativa significa que existe sobrefinanciamento no momento t.

2.4. Ganhos e Perdas

Corresponde aos desvios actuariais anuais verificados no valor da Responsabilidade Actuarial não financiada. O incremento (positivo ou negativo) durante o ano t, resultante desses desvios é igual à diferença entre o valor esperado da $\overline{(RA)}_{t+1}$ e o valor observado $\overline{(RA)}_{t+1}$ no início do ano, ou seja

$$(GP)_t = E\left[\overline{(RA)}_{t+1}\right] - \overline{(RA)}_{t+1} \tag{14}$$

Existem técnicas para amortizar os Ganhos e Perdas que ocorrem ao longo do tempo, sendo estudado no Capitulo III dois métodos: *Spread* e *Amortization of Losses*. O valor da amortização em cada instante é normalmente incluído na contribuição a realizar. Ao resultado da soma do Custo Anual com a parcela respectiva da amortização dos Ganhos e Perdas iremos designar por ${}^{gp}(CA)_t$:

$${}^{gp}(CA)_t = (CA)_t + (AM)_t$$

CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE FINANCIAMENTO

Existe uma grande variedade de métodos actuariais para o cálculo das responsabilidades e custos inerentes a um plano de pensões de benefício definido. A selecção por um destes métodos depende não só das particularidades do plano como das características da população, da situação financeira da(s) empresa(s) em causa, de razões de ordem fiscal e da legislação em vigor. No entanto, para qualquer que seja o método escolhido, o valor do fundo de pensões deverá ser, em qualquer momento, superior ou igual ao valor actual das pensões em pagamento.

A classificação destes métodos pode ser feita de diferentes modos, dependendo das características que queremos colocar em destaque. Nesta abordagem iremos classificar os vários métodos existentes em *Métodos de Custo Individual* e *Métodos de Custo Agregado* seguindo, por ordem de importância, Winklevoss (1977), McGill (1984), Trowbridge (1952) e Huerta de Soto (1984).

Os **Métodos de Custo Individual** são assim classificados porque o cálculo do Custo Normal e da Responsabilidade Actuarial é feito individualmente para cada participante do plano, obtendo-se os valores totais através da soma desses valores para todos os indivíduos.

Os **Métodos de Custo Agregado** utilizam todos os indivíduos abrangidos pelo plano no cálculo do Custo Normal através de um valor médio actuarial, não sendo este custo igual à soma dos Custos Normais individuais. A Responsabilidade Actuarial resulta, geralmente, do somatório das Responsabilidades Actuariais afectas a cada indivíduo.

Uma vez que os métodos tradicionais descritos em Trowbridge (1952) são os mais utilizados e conhecidos iremos enquadra-los nesta classificação, fazendo na secção seguinte um análise mais aprofundada. Neste caso não foi traduzida a sua denominação já que os actuários portugueses utilizam a denominação original com algumas adaptações.

1. MÉTODOS DE CUSTO INDIVIDUAL

1.1. Métodos de financiamento baseados nos Benefícios Acrescidos

Nesta família de métodos associa-se a cada ano, em que o empregado presta os seus serviços, uma unidade de benefício. O custo com o benefício que se vence no ano corrente e o valor actual de todos os benefícios acumulados até à data representam, respectivamente, o Custo Normal e a Responsabilidade Actuarial de um determinado indivíduo. O Custo Normal e a Responsabilidade Actuarial para o plano resultam da soma destes mesmos valores mas calculados para todos os indivíduos.

Este método adapta-se especialmente aos planos de pensões cuja fórmula de benefícios esteja baseada no número de anos de serviço prestados à empresa.

1.1.1. sem considerar Responsabilidade Suplementar

Tendo em conta o que foi dito anteriormente, o Custo Normal para o indivíduo de idade x é

$$(CN)_x = v^{r-x} \cdot {}_{r-x}p_x \cdot b_x \cdot \bar{a}_r^h \tag{15}$$

Os benefícios b_x, afectados aos diversos anos ao serviço da empresa, podem ser quaisquer desde que satisfaçam a condição (1) referida na secção anterior.

Podemos obter dois casos particulares[5] deste método se considerarmos os benefícios

$b'_x = \dfrac{B_r}{r-a}$, proporcional ao tempo de serviço potencialmente total

$b''_x = \dfrac{B_r}{S_r} s_x$, constante em % do salário em cada idade

com s_x = salário à idade x

$$S_x = \int_a^x s_y dy, \ \forall x \in [a, r]$$

A Responsabilidade Actuarial é calculada através da expressão

$$(RA)_x = v^{r-x} \cdot {}_{r-x}p_x \cdot B_x \cdot \bar{a}_r^h \tag{16}$$

Para os dois casos particulares a Responsabilidade Actuarial é obtida substituindo B_x respectivamente por

$$B'_x = \frac{B_r}{r-a}(x-a) \tag{17}$$

e por

$$B''_x = \frac{B_r}{S_r} S_x \tag{18}$$

Para este método, assim como para os seus dois casos particulares, podemos calcular o CN e a RA em função do $(BT)_x$, para $a \le x \le r$:

Quadro 1

Comparação entre o Custo Normal e a Responsabilidade Actuarial não considerando Responsabilidade Suplementar

	Caso Geral	Caso particular 1	Caso particular 2
CN	$b_x \dfrac{(BT)_x}{B_r}$	$\dfrac{(BT)_x}{r-a}$	$s_x \dfrac{(BT)_x}{S_r}$
RA	$B_x \dfrac{(BT)_x}{B_r}$	$(x-a)\dfrac{(BT)_x}{r-a}$	$S_x \dfrac{(BT)_x}{S_r}$

[5] Repare-se que estes dois casos particulares verificam a condição (1) da Secção anterior.

No primeiro caso particular, usualmente designado por Unit Credit, a pensão a receber à idade de reforma é dividida em tantas unidades quantos os anos de serviço prestados. Se B_r for calculado tendo em conta o salário a idade de reforma diz-se que se trata do **Unit Credit projectado**, se ao contrário forem utilizados salários correntes é designado por **Unit Credit não projectado**.

1.1.2. considerando Responsabilidade Suplementar

Se a implementação do plano for posterior à data de entrada de um determinado indivíduo para a empresa então existirá Responsabilidade Suplementar que será igual aos seus serviços passados ainda não financiados. Neste método vamos amortizar esta responsabilidade durante o período de serviço futuro.

Se o indivíduo em estudo tinha z anos ($z > a$) quando o plano foi implementado, o incremento no benefício b_x, com $z < x < r$, resultante da responsabilidade por serviços passados B_z, é

$$\frac{B_z}{B_r - B_z} b_x \tag{19}$$

Este incremento, resultante do quociente entre o benefício acumulado correspondente ao tempo de serviço passado e o benefício acumulado por tempo de serviço futuro $B_r - B_z$, representa o Custo Suplementar à idade x. O benefício total que se vence à idade x é, portanto,

$$b_x^T = b_x + \frac{B_z}{B_r - B_z} b_x = \frac{B_r}{B_r - B_z} b_x \tag{20}$$

sendo o valor acumulado dos benefícios vencidos até à data x

$$B_x^T = \frac{B_r}{B_r - B_z}(B_x - B_z) \tag{21}$$

Repare-se que $B_r^T = B_r$, o que significa que os serviços passados serão amortizados ao fim de $r - z$ anos.

O Custo Anual (que resulta da soma do Custo Normal com o Custo Suplementar) e a Responsabilidade Actuarial obtêm-se de (15) e (16) substituindo b_x e B_x por b_x^T e B_x^T.

No primeiro caso particular teremos

$$b_x'^T = \frac{B_r}{r - a} + \frac{z - a}{r - z} \cdot \frac{B_r}{r - a} = \frac{B_r}{r - z} \tag{22}$$

e portanto

$$B_x'^T = \frac{B_r}{r - z}(x - z) \tag{23}$$

De modo análogo para o segundo caso,

$$b_x''^T = \frac{B_r}{S_r} s_x + \frac{S_z}{S_r - S_z} \cdot \frac{B_r}{S_r} s_x = \frac{B_r}{S_r - S_z} s_x \tag{24}$$

$$B_x''^T = \frac{S_x - S_z}{S_r - S_z} B_r \tag{25}$$

Assim obtém-se

Quadro 2

Comparação entre o Custo Normal e a Responsabilidade Actuarial considerando Responsabilidade Suplementar

	Caso Geral	Caso particular 1	Caso particular 2
CA	$b_x \frac{(BT)_x}{B_r - B_z}$	$\frac{(BT)_x}{r-z}$	$s_x \frac{(BT)_x}{S_r - S_z}$
RA	$(B_x - B_z)\frac{(BT)_x}{B_r - B_z}$	$(x-z)\frac{(BT)_x}{r-z}$	$(S_x - S_z)\frac{(BT)_x}{S_r - S_z}$

1.2. Métodos de financiamento baseados nos Benefícios Totais

O Custo Normal é estimado tendo em conta a totalidade dos benefícios que o plano de pensões irá garantir no futuro, independentemente do número de anos ao serviço da empresa em questão. O Custo Normal é em cada ano uma porção do BT ainda não amortizado.

1.2.1. sem considerar Responsabilidade Suplementar

O Custo Normal é dado por

$$(CN)_x = K_x\left[(BT)_x - (CNP)_x\right] \Leftrightarrow \tag{26}$$

$$K_x = \frac{(CN)_x}{(BT)_x - (CNP)_x} \tag{27}$$

com

$$0 \leq K_x \leq 1$$

Repare-se que quando $K_x = 1$ se tem

$$(CN)_x = (BT)_x - (CNP)_x \tag{28}$$

o que significa que se amortiza tudo o que faltava e portanto para $y > x$ teremos $(CN)_x = 0$.

Se $K_x = 1$ para todo o x então o custo com a pensão é suportado logo à entrada para o plano. Neste caso o Custo Normal é dado por

$$(CN)_x = \begin{cases} (BT)_a & \Leftarrow x = a \\ 0 & \Leftarrow x > a \end{cases}$$

Este procedimento é conhecido como **Initial Funding**.

Se $K_x = 0$ para $x < r$ e $K_x = 1$ para $x = r$ então o Custo Normal é

$$(CN)_x = \begin{cases} 0 & \Leftarrow a \leq x < r \\ (BT)_r & \Leftarrow x = r \end{cases}$$

o que significa que estamos na presença do método **Terminal Funding.**

É, no entanto, mais usual atribuir valores a K_x de modo a que o Custo normal seja, em percentagem, constante durante o período activo, se não existirem alterações nos benefícios e nas hipóteses actuariais e, ainda, se os ganhos e perdas forem nulos. Existem duas variantes: ou o Custo Normal gerado é igual a uma quantidade fixa K de unidades monetárias ou é uma percentagem constante S do salário. Vamos utilizar na notação as letras $\underline{k}$ e $\underline{s}$ caso se trate da primeira ou da segunda variante. O 2º caso representa o Método **Entry-Age**.

<u>Caso 1:</u>

Para calcularmos o Custo Normal vamos equacionar o Valor Actual dos Custos Normais Futuros com o Valor Actual dos Benefícios Totais:

$$^{k}(CN)_x \bar{a}_{a:\overline{r-a}|} = (BT)_a \tag{29}$$

com

$\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}$ = renda temporária tendo em conta os decrementos que actuam durante o período activo

Resolvendo a equação (29) obtêm-se

$$^{k}(CN)_x = \frac{(BT)_a}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} = K \tag{30}$$

O valor da RA resulta da expressão

$$^{k}(RA)_x = (BT)_x - {}^{k}(CN)_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} \tag{31}$$

que pode ser simplificado:

$$^{k}(RA)_x = \frac{\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} (BT)_x \tag{32}$$

<u>Caso 2:</u>

De acordo com a segunda variante teremos

$$^{s}(CN)_x = S \cdot s_x \tag{33}$$

De modo análogo a (29)

$$S \cdot s_a \cdot \bar{a}^{s}_{a:\overline{r-a}|} = (BT)_a \tag{34}$$

com

$s_a \cdot \bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}$ = valor actual dos salários futuros para um indivíduo de idade x

Resolvendo (34) em ordem a S obtemos

$$S = \frac{(BT)_a}{s_a \cdot \bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}} \tag{35}$$

Para o cálculo da RA teremos

$$^s(RA)_x = (BT)_x - {}^s(CN)_x \cdot \bar{a}^s_{x:\overline{r-x}|} \tag{36}$$

e, de um modo mais simples,

$$^s(RA)_x = \frac{\bar{a}^s_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}}(BT)_x \tag{37}$$

1.2.2. considerando Responsabilidade Suplementar

De modo análogo ao método referido em 1.1.2. não existe explicitamente Responsabilidade Suplementar no início do plano, já que esta será amortizada no restante período activo. Vamos supor que o plano começou quando um determinado indivíduo tinha z anos de idade e que o $(BT)_a$ será amortizado no período $[z, r[$, através do Custo Anual, que será uma das seguintes expressões apresentadas

$$(CA)_x = K_x\left[(BT)_x - (CNP)_x\right] \tag{38}$$

com $(CNP)_x = \int_z^x (1+i)^{x-y} \frac{1}{{}_{x-y}p_x}(CN)_y dy$

$$^k(CA)_x = \frac{(BT)_z}{\bar{a}_{z:\overline{r-z}|}} \tag{39}$$

$$^s(CA)_x = S \cdot s_x = \frac{(BT)_z}{s_z \cdot \bar{a}^s_{z:\overline{r-z}|}} s_x \tag{40}$$

conforme se trate do caso geral ou dos casos particulares aqui estudados tendo em conta que $z < x < r$.

A Responsabilidade Actuarial é determinada através da diferença entre o $(BT)_x$ e o $(CNP)_x$, podendo ser expressa para os dois casos mais usuais como

$$^k(RA)_x = \frac{\bar{a}_{z:\overline{x-z}|}}{\bar{a}_{z:\overline{r-z}|}}(BT)_x \tag{41}$$

$$^{s}(RA)_x = \frac{\bar{a}^{s}_{z:\overline{x-z|}}}{\bar{a}^{s}_{z:\overline{r-z|}}}(BT)_x \tag{42}$$

Tendo em conta a equação (32), a Responsabilidade Suplementar no início do plano é expressa através da igualdade

$$^{k}(RS)_z = {}^{k}(RA)_z = \frac{\bar{a}_{a:\overline{z-a|}}}{\bar{a}_{a:\overline{r-a|}}}(BT)_z \tag{43}$$

Se a esta quantidade, amortizada desde z até r, somarmos o Custo Normal obtido em (30)

$$\frac{\dfrac{\bar{a}_{a:\overline{z-a|}}(BT)_z}{\bar{a}_{a:\overline{r-a|}}}}{\bar{a}_{z:\overline{r-z|}}} + \frac{(BT)_a}{\bar{a}_{a:\overline{r-a|}}} = \frac{(BT)_z}{\bar{a}_{z:\overline{r-z|}}} = {}^{k}(CA)_x \tag{44}$$

constata-se que o Custo Anual deste método resulta do Custo Normal obtido através do método descrito em 1.2.1. adicionado com a Responsabilidade Suplementar amortizada durante o restante período activo. Resultado semelhante seria obtido para o caso 2, usualmente designado por **Individual Level Premium**.

1.2.3. com Responsabilidade Suplementar parcial

O Custo Normal para cada idade $x > z$ é definido apenas em termos dos benefícios futuros, e não através dos benefícios totais, e a RA é igual à soma do valor actual dos benefícios por serviços passados com o valor actual dos benefícios por serviços futuros.

Teremos assim

$$^{k}(CN)_x \cdot \bar{a}_{z:\overline{r-z|}} = (B_r - B_z) \cdot {}_{r-z}p_z \cdot v^{r-z} \cdot \bar{a}^{h}_{r} \Leftrightarrow \tag{45}$$

$$^{k}(CN)_x = \frac{(B_r - B_z) \cdot {}_{r-z}p_z \cdot v^{r-z} \cdot \bar{a}^{h}_{r}}{\bar{a}_{z:\overline{r-z|}}} \tag{46}$$

$$^{k}(RA)_x = B_z\, {}_{r-x}p_x v^{r-x} \bar{a}^{h}_{r} + (B_r - B_z)\, {}_{r-x}p_x v^{r-x} \bar{a}^{h}_{r} - {}^{k}(CN)_x \bar{a}_{x:\overline{r-x|}} =$$

$$= (BT)_x - {}^{k}(CN)_x \bar{a}_{x:\overline{r-x|}} \tag{47}$$

De igual modo teremos

$$S \cdot s_z . \bar{a}^{s}_{z:\overline{r-z|}} = (B_r - B_z) \cdot {}_{r-z}p_z \cdot v^{r-z} \cdot \bar{a}^{h}_{r} \Leftrightarrow$$

$${}^{s}(CN)_x = S \cdot s_x = \frac{(B_r - B_z) \cdot {}_{r-z}p_z \cdot v^{r-z} \cdot \bar{a}^{h}_{r}}{s_z \; \bar{a}^{s}_{z:\overline{r-z|}}} s_x \tag{48}$$

$${}^{s}(RA)_x = (BT)_x - {}^{s}(CN)_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x|}} \tag{49}$$

2. MÉTODOS DE CUSTO AGREGADO

O termo agregado indica que as fórmulas são utilizadas para todos os membros do plano globalmente em vez de uma forma individualizada. Assim, e apenas se o grupo de activos for constituído por um elemento ou se todos os membros tiverem entrado para o plano com a mesma idade e na mesma altura, os métodos serão equivalentes.

O Custo Normal destes métodos baseia-se num valor médio actuarial enquanto que a Responsabilidade Actuarial resulta normalmente do somatório das Responsabilidades Actuariais individualizadas.

2.1. Métodos de financiamento baseados nos Benefícios Acrescidos

2.1.1. sem considerar Responsabilidade Suplementar

Considerando este método mas de Custo Individual, e de acordo com o Quadro 1, o Custo Normal resulta do produto do acréscimo de benefício à idade x pelo quociente do Valor Actual dos Benefícios Totais pelo benefício a conceder à idade de reforma. Assim, obtemos para o Custo Normal no momento t, tendo em conta todos os membros, a seguinte expressão

$$(CN)_t = \int_a^r l_x \cdot b_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x \cdot B_r dx} \right] dx \tag{50}$$

em que l_x representa o número de indivíduos com idade x.

Comparando a equação (50) com o Custo Normal calculado através do método descrito em 1.1.1. verificamos que estes dois métodos não são equivalentes. Mas se existir apenas um activo, ou se os membros tiverem entrado para o plano com a mesma idade e na mesma altura, a expressão (50) corresponderá a um custo individual igual a (15).

Para os dois casos particulares teremos

$$(CN)'_t = \int_a^r l_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x \cdot (r-a) dx} \right] dx \tag{51}$$

$$(CN)''_t = \int_a^r l_x \cdot s_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x \cdot S_r dx} \right] dx \tag{52}$$

A Responsabilidade Actuarial resulta da soma das RA calculadas para cada um dos indivíduos através da fórmula indicada em (16):

$$(RA)_t = \int_a^r l_x \cdot (RA)_x dx \tag{53}$$

Este método na prática não é utilizado.

2.1.2. considerando Responsabilidade Suplementar

De modo análogo ao descrito em 1.1.2. $z(x)$ será para cada indivíduo (x) a idade que este tinha aquando da implementação do plano. Para entradas posteriores à constituição do Plano de Pensões considera-se $z(x) = a$, $B_{z(x)} = 0$ e $S_{z(x)} = 0$ uma vez que este indivíduos não tem responsabilidades por serviços passados por financiar.

A expressão para o Custo Anual no momento t é

$$(CA)_t = \int_a^r l_x b_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x (B_r - B_{z(x)}) dx} \right] dx \tag{54}$$

Também aqui se existir apenas um activo, ou se os membros tiverem entrado para o plano com a mesma idade e na mesma altura, a expressão (54) corresponderá a um custo individual igual ao descrito no Quadro 2. Quando todos os empregados, que entraram para a empresa antes da implementação do plano, se reformarem a equação (54) transforma-se na equação (50).

Do mesmo modo

$$(CA)_t' = \int_a^r l_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x (r - z(x)) dx} \right] dx \qquad (55)$$

$$(CA)_t'' = \int_a^r l_x \cdot s_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_x dx}{\int_a^r l_x (S_r - S_{z(x)}) dx} \right] dx \qquad (56)$$

2.2. Métodos de financiamento baseados nos Benefícios Totais

2.2.1. sem considerar Responsabilidade Suplementar

Este método é muitas vezes designado por **Frozen Initial Liability**. Vamos apenas estudar os dois casos particulares referidos em 1.2.1. O Custo Normal é definido por

$${}^{k}(CN)_t = \int_a^r l_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_a dx}{\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{a:\overline{r-a}|} dx} \right] dx \qquad (57)$$

$${}^{s}(CN)_t = \int_a^r l_x \cdot s_x \left[\frac{\int_a^r l_x \cdot (BT)_a}{\int_a^r l_x \cdot s_a \cdot \bar{a}^{s}_{a:\overline{r-a}|}} \right] \qquad (58)$$

(59)

Através das expressões (7) e (9) da secção anterior obtêm-se,

$$(RA)_x = (BT)_x - (CNF)_x = (CNP)_x + (RS)_x = (CNP)_x + (CSP)_x + \overline{(RS)}_x \quad (60)$$

com

$\overline{(RS)}_x$ = parte não amortizada da Responsabilidade Suplementar

$= (RS)_x - (CSP)_x$

Sabe-se que para um indivíduo x

$$(RA)_x = (BT)_x - (CNF)_x \Leftrightarrow (CNF)_x = (BT)_x - (RA)_x \Leftrightarrow$$

$$(CN)_x = \frac{(BT)_x - (RA)_x}{\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}}$$

Se se verificar

$$^{k}(RA)_x = F_x + \overline{(RS)}_x \tag{61}$$

com

F_x = parte do Valor do Fundo que está afecta ao indivíduo x

então

$$^{k}(CN)_x = \frac{(BT)_x - F_x - \overline{(RS)}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}} \tag{62}$$

Resulta então para todos os indivíduos

$$^{k}(CN)_t = \int_a^r l_x \left[\frac{\int_a^w l_x \cdot (BT)_x dx - F_t - \overline{(RS)}_t}{\int_a^r l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \right] dx \tag{63}$$

Para a segunda variante teremos

$$^{s}(CN)_t = \int_a^r l_x \cdot s_x \left[\frac{\int_a^w l_x \cdot (BT)_x dx - F_t - \overline{(RS)}_t}{\int_a^r l_x \cdot s_x \cdot {}^{s}\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \right] dx \tag{64}$$

2.2.2. considerando Responsabilidade Suplementar

Os Custos Anuais para a primeira e segunda variantes resultam respectivamente das expressões (63) e (64) retirando a parcela $\left(\overline{RS}\right)_x$, o que significa que no cálculo do Custo Normal está incluindo a amortização da Responsabilidade Suplementar já que o Valor do Fundo não inclui esse valor. Este método é geralmente designado por **Aggregate**.

$$
{}^{k}(CA)_t = \int_a^r l_x \left[\frac{\displaystyle\int_a^w l_x \cdot (BT)_x dx - F_t}{\displaystyle\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \right] dx \tag{65}
$$

$$
{}^{s}(CA)_t = \int_a^r l_x \cdot s_x \left[\frac{\displaystyle\int_a^w l_x \cdot (BT)_x dx - F_t}{\displaystyle\int_a^r l_x \cdot s_x \cdot {}^{s}\bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \right] dx \tag{66}
$$

Repare-se que quando a Responsabilidade Suplementar está financiada na totalidade as equações (65) e (66) são equivalentes respectivamente a (63) e (64).

2.2.3. com Responsabilidade Suplementar parcial

É utilizado o mesmo principio subjacente ao ponto 1.2.3., ou seja o Custo Normal é definido apenas em termos dos beneficios futuros. Assim, teremos neste caso as equações (65) e (66) para o Custo Normal em que $(BT)_x$ representa o Valor Actual dos beneficios futuros no inicio do plano. Este método é designado por **Attained Age**.

MÉTODOS TRADICIONAIS

Nesta secção, com base em Trowbridge (1952), Colbran (1982) e Dusfrene (1986), vamos apenas analisar os métodos mais usuais. Em Portugal, na parte correspondente aos activos, o mínimo de financiamento estabelecido pelo Instituto de Seguros de Portugal para os Fundos de Pensões é calculado com o Unit Credit não projectado enquanto que no cálculo efectivo das responsabilidades é usualmente utilizado o Unit Credit projectado. Para o cálculo do Custo Normal é vulgar utilizar o Aggregate. No entanto o Entry Age, o Attained Age e o Frozen Initial Liability são métodos também utilizados no cálculo das responsabilidades inerentes a um plano de pensões.

1. DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS TRADICIONAIS

Os métodos apresentados em Trowbridge (1952) são normalmente designados por Métodos Tradicionais. Embora existam variações destes métodos não as iremos apresentar nesta secção. Estes métodos são normalmente divididos em seis classes. A escolha dessas classes é feita por ordem decrescente do Custo Normal produzido (ou por ordem crescente da Responsabilidade Suplementar) pressupondo que a população é estacionária e a taxa de rendimento do fundo é igual à taxa técnica actuarial. Apenas os métodos das classes I e II não podem ser utilizados como métodos de financiamento de Fundos de Pensões, já que não utilizam a Capitalização.

Embora também seja usual representar o Custo Normal em percentagem da Massa Salarial ou do Valor Actual dos Salários Futuros iremos calcula-lo em valor absoluto.

1.1. Classe I

Esta classe inclui unicamente o método **Pay-as-you-go**. As contribuições anuais são exactamente iguais aos benefícios pagos nesse ano. O valor do fundo é sempre nulo porque há pagamento directo das pensões. Também conhecido por Repartição[6] simples, é o método utilizado geralmente pela Segurança Social.

$$(CN)_t = B_r \int_r^w l_x h(x) dx \tag{67}$$

1.2. Classe II

No método **Terminal Funding** a contribuição em cada ano serve para fazer face ao valor actual das pensões dos indivíduos que se reformam nesse ano. É um sistema de Repartição mas dos capitais de cobertura.

Assim, o Custo Normal é fortemente variável uma vez que o número de reformados assim como o valor da pensão pode ser muito diferente em cada ano, sendo normalmente equilibrado nos anos subsequentes à implementação do plano e excessivo à medida que a população envelhece.

[6] No sistema de financiamento designado por **Repartição** não se constituem reservas uma vez que as contribuições dos activos servem para fazer face ao pagamento das actuais pensões.

O valor do Custo Normal no instante t resulta, portanto, de todos os indivíduos que se reformam nesse instante e é igual a

$$(CN)_t = l_r \cdot B_r \cdot \bar{a}_r^h \tag{68}$$

No entanto se, aquando a implementação do plano, existirem reformados abrangidos por este plano o Custo Normal é

$$(CN)_{t=0} = B_r \int_r^w l_x \bar{a}_x^h dx \tag{69}$$

A Responsabilidade Actuarial resulta de

$$(RA)_t = B_r \int_r^w l_x \bar{a}_x^h dx \tag{70}$$

Este método não pode ser utilizado por um plano de pensões que esteja a ser financiado por um Fundo de Pensões, uma vez que não são criadas reservas, durante o período activo, com o objectivo de financiar o Valor Actual dos Benefícios Totais.

1.3. Classe III

O **Unit Credit é** baseado no principio de que a pensão a receber à idade de reforma é dividida em tantas unidades quantas o número de anos presumíveis de serviço para um determinado membro do plano, sendo cada unidade financiada em cada ano.

O Custo Normal anual é o montante necessário para financiar a unidade afecta a um determinado indivíduo num determinado ano, ou seja, é o valor actual a prémio único do acréscimo de benefício nesse ano. Assim, para um determinado indivíduo de idade x teremos

$$(CN)_x = \frac{B_r}{r-a} {}_{r-x|}\bar{a}_x^h \tag{71}$$

A Responsabilidade Actuarial representa o valor actual de todas as unidades de pensão afectas aos instantes anteriores:

$$(RA)_x = \begin{cases} (x-a) \cdot \dfrac{B_r}{r-a} {}_{r-x|}\bar{a}_x^h & \Leftarrow a < x < r \\ B_r \cdot \bar{a}_x^h & \Leftarrow x \geq r \end{cases} \tag{72}$$

Obtemos então para todos os indivíduos[7]

$$(CN)_t = \int_a^r l_x \cdot \frac{B_r}{r-a} {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx \tag{73}$$

[7] O Unit Credit é um Método de Custo Individual.

$$(RA)_t = \int_a^r l_x \cdot (x-a) \cdot \frac{B_r}{r-a} \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx + \int_r^w l_x \cdot B_r \cdot \bar{a}_x^h dx \tag{74}$$

A Responsabilidade Suplementar, ou seja a responsabilidade com serviços passados decorrente dos activos e reformados já existentes aquando a implementação do plano, é normalmente amortizada através duma anuidade certa num período de n anos com pagamentos anuais de $k\% = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \cdot 100$ da Responsabilidade Suplementar.

Se B_r for calculado tendo em conta o salário projectado para a idade de reforma designa-se este método por Unit Credit projectado, se ao contrário forem utilizados salários correntes diz-se Unit Credit não projectado.

É normalmente utilizado para planos que confiram uma acumulação de benefícios proporcional aos anos de serviço, como é o caso de planos que tem em conta as carreiras.

1.4. Classe IV

1.4.1. Entry Age

O Custo Normal para um determinado membro do plano é visualizado como um pagamento constante, CN, de modo a que o Valor Actual dos Benefícios Totais seja financiado na totalidade. Assim, é determinado para cada participante o nível anual de contribuições necessárias assumindo que estas começam a ser pagas desde a data de entrada para o plano até a data de reforma. Então terèmos

$$(CNF)_a = B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h \Leftrightarrow CN \cdot \bar{a}_{a:\overline{r-a}|} = B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h \Leftrightarrow$$

$$CN = \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \tag{75}$$

A Responsabilidade Actuarial para um indivíduo de idade x resulta da diferença, em valor actual, entre os benefícios totais e os Custos Normais futuros:

$$(RA)_x = \begin{cases} B_r \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h - \dfrac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} & \Leftarrow a \le x < r \\ B_r \cdot \bar{a}_x^h & \Leftarrow x \ge r \end{cases} \tag{76}$$

O valor do Custo Normal para o grupo resulta do produto do Custo Normal individual pelo número total de indivíduos:

$$(CN)_t = CN \cdot \int_a^r l_x dx \tag{77}$$

Para o grupo de membros obtemos

$$(RA)_t = \int_a^r l_x \left(B_r \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h - \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} \right) dx + \int_r^w l_x \cdot B_r \cdot \bar{a}_x^h dx \tag{78}$$

ou de um modo mais simples

$$(RA)_t = \int_a^w l_x \cdot (RA)_x dx \tag{79}$$

Tal como no Unit Credit, a Responsabilidade Suplementar pode ser amortizada de vários modos, sendo mais comum através de pagamentos nivelados num número fixo de anos.

1.4.2. Individual Level Premium

Trata-se de um caso particular do Entry Age no qual as responsabilidade por serviços passados, referentes aos membros que já existiam aquando o início do plano, será amortizada no período futuro de trabalho. Assim, para um indivíduo de idade x no inicio do plano o Custo Anual tem o valor

$$(CA)_x = \frac{B_r \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h}{\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}} \tag{80}$$

que resulta da soma do Custo Normal com o Custo Suplementar,

$$(CA)_x = \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} + \left(\frac{B_r \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h}{\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}} - \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \right) \tag{81}$$

Estendendo este conceito a toda a população obtemos o Custo Anual inicial

$$(CA)_{t=0} = \int_a^r l_x \frac{B_r \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h}{\bar{a}_{x:\overline{r-x}|}} dx + \int_r^w l_x \cdot B_r \cdot \bar{a}_x^h dx \tag{82}$$

Após s anos da inauguração do plano o Custo Anual será

$$(CA)_s = \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \int_a^{a+s} l_x dx + \int_{a+s}^r l_x \cdot \frac{B_r \cdot {}_{r-x+s|}\bar{a}_{x-s}^h}{\bar{a}_{x-s:\overline{r-x+s}|}} dx \tag{83}$$

Após $r-a$ anos o Custo Anual será

$$(CA)_s = \frac{B_r \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}} \int_a^r l_x dx \tag{84}$$

O Custo Normal manter-se-á constante e o Custo Suplementar decresce durante $r-a-1$ anos. Ao fim desse tempo a amortização da Responsabilidade Suplementar estará completa.

1.4.3. Aggregate

Ao contrário dos métodos anteriormente descritos, no Aggregate não é efectuada uma afectação de custos a cada participante. O principio deste método é equacionar o Valor Actual dos Beneficios Totais por financiar (ou seja a diferença BT - F) em percentagem do Valor Actual dos Custos Normais Futuros dos membros já existentes. É mais usual neste método não considerar novas entradas para o plano.

O Custo Anual toma o valor de

$$(CA)_t = \frac{B_r\left[\int_a^r l_x \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx + \int_r^w l_x \cdot \bar{a}_x^h dx\right] - F_{t-1}}{\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \int_a^r l_x dx \tag{85}$$

Uma vez que este método não faz distinção entre o tempo de serviço passado e futuro, a responsabilidade por serviços passados é diluída por todos os participantes existentes no inicio do plano. Por isso a expressão (85) se designa por Custo Anual porque inclui a amortização das responsabilidades por serviços passados.

1.4.4. Attained Age

Aqui os beneficios a receber à idade de reforma são divididos em beneficios por serviços passados e futuros do mesmo modo que no Unit Credit. Existe completa liberdade relativamente ao financiamento da responsabilidade com serviços passados sendo no entanto para os serviços futuros adoptado o Aggregate. A primeira contribuição para os serviços futuros resulta de

$$(CA)_{t=0} = \frac{\frac{B_r}{r-a}\int_a^r (r-x) \cdot l_x \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx}{\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \int_a^r l_x dx \tag{86}$$

Os restantes Custos Normais são calculados de modo análogo ao Aggregate, ou seja

$$(CA)_t = \frac{\frac{B_r}{r-a}\int_a^r (r-x) \cdot l_x \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx - f_{t-1}}{\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx} \int_a^r l_x dx \tag{87}$$

com

f_t a diferença acumulada entre a contribuição do Attained Age e a do Unit Credit, actualizada à taxa de rendimento

A amortização da Responsabilidade Suplementar é calculada através do Unit Credit.

1.5. Classe V

No **Initial Funding** o Valor Actual dos Benefícios Totais é financiado aquando a entrada para o plano. Assim, o Custo Normal é

$$B_r \cdot l_a \cdot {}_{r-a|}\bar{a}_a^h \tag{88}$$

e a Responsabilidade Suplementar tem o valor

$$B_r \left[\int_a^r l_x \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h + \int_r^w l_x \cdot \bar{a}_x^h dx \right] \tag{89}$$

1.6. Classe VI

No **Complete Funding** as pensões são pagas em cada ano através do rendimento do fundo nesse período, ou seja, em cada momento o valor da Responsabilidade Actuarial terá que respeitar a equação

$$(RA)_t \cdot i = B_r \int_r^w l_x dx \tag{90}$$

Assim, na inauguração do plano a Responsabilidade Suplementar constitui o fundo inicial para podermos obter rendimento necessário para cobrir as pensões. Normalmente essa responsabilidade inicial é amortizada através duma anuidade financeira calculada com a taxa de rendimento do fundo.

1.7. Frozen Initial Liability (FIL)

Trata-se de uma combinação entre dois métodos actuariais, existindo duas variantes:

- Aggregate e Entry Age
- Aggregate e Unit Credit

Em primeiro lugar é calculada a Responsabilidade Suplementar de acordo com o Entry Age ou o Unit Credit consoante o caso pretendido. O valor da Responsabilidade Suplementar, a que designamos por FIL, é "congelado" e projectado por vários anos, geralmente entre 15 e 25 anos. Esta responsabilidade inicial "congelada" é amortizada através duma anuidade financeira calculada com a taxa de rendimento do fundo. Assim, durante o período em que ainda exista responsabilidade congelada por amortizar, o Custo Normal do plano é dado por

$$(CN)_t = \frac{B_r \int_a^r l_x \cdot {}_{r-x|}\bar{a}_x^h dx + B_r \int_r^w l_x \cdot \bar{a}_x^h dx - F_{t-1} - \overline{(FIL)}_{t-1}}{\int_a^r l_x \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x|}} dx} \int_a^r l_x dx \qquad (91)$$

com

$\overline{(FIL)}_t$ a parte da FIL não amortizada no instante t

Quando a Responsabilidade Suplementar estiver completamente amortizada, este método degenera no Aggregate.

O Custo Anual do plano resulta da soma do Custo Normal com a amortização da FIL.

2. EXEMPLO

Este exemplo permite perceber qual foi o critério que esteve subjacente na classificação dos Métodos Tradicionais em 7 classes.

2.1. Hipóteses consideradas

2.1.1. Plano de Pensões

- idade de entrada aos 25 anos
- reforma apenas por velhice aos 65 anos
- plano de pensões independente da Segurança Social
- benefício = 0,3% $\cdot n \cdot S_m$ com n o número de anos de serviço à data de reforma e S_m o salário médio dos últimos dez anos antes da reforma
- salário á data de entrada = 100 contos e supõe-se que cresce à mesma taxa de crescimento salarial pressuposta nos cálculos (ver Quadro 4)
- pensão paga 14 vezes
- inexistência de direitos adquiridos
- o plano é agora inaugurado

2.1.2. População

A população abrangida por este plano distribui-se de acordo com o Quadro 3, e trata-se duma população estacionária.

2.1.3. Pressupostos actuariais

- taxa de rendimento do fundo = 6%
- taxa de crescimento salarial = 4%
- taxa técnica actuarial = 6%
- taxa de crescimento das pensões =0%
- período de amortização da (RS) = 20 anos

2.2. Resultados

Quadro 3
População estacionária

Participantes		Reformados	
Idade x	Número l_x	Idade x	Número l_x
25	100	65	7
26	86	66	7
27	73	67	7
28	71	68	7
29	63	69	7
30	58	70	6
31	54	71	6
32	52	72	6
33	32	73	6
34	30	74	6
35	26	75	5
36	24	76	5
37	21	77	4
38	20	78	3
39	19	79	3
40	19	80	3
41	16	81	2
42	16	82	2
43	16	83	2
44	15	84	1
45	15	85	1
46	15	86	1
47	12	87	1
48	12	88	1
49	12	89	1
50	10	-	-
51	10	-	-
52	9	-	-
53	9	-	-
54	9	-	-
55	9	-	-
56	8	-	-
57	8	-	-
58	8	-	-
59	8	-	-
60	7	-	-
61	7	-	-
62	7	-	-
63	7	-	-
64	7	-	-
Total :	**1000**	**Total :**	**100**

Quadro 4

Antiguidade e Salários

Idade x	**Antiguidade** $x\text{-}a$	**Salário anual**
25	0	1 400
26	1	1 456
27	2	1 514
28	3	1 575
29	4	1 638
30	5	1 703
31	6	1 771
32	7	1 842
33	8	1 916
34	9	1 993
35	10	2 072
36	11	2 155
37	12	2 241
38	13	2 331
39	14	2 424
40	15	2 521
41	16	2 622
42	17	2 727
43	18	2 836
44	19	2 950
45	20	3 068
46	21	3 190
47	22	3 318
48	23	3 451
49	24	3 589
50	25	3 732
51	26	3 881
52	27	4 037
53	28	4 198
54	29	4 366
55	30	4 541
56	31	4 722
57	32	4 911
58	33	5 108
59	34	5 312
60	35	5 525
61	36	5 746
62	37	5 975
63	38	6 214
64	39	6 463

Quadro 5
Comparação entre os vários Métodos de financiamento de Planos de pensões

Classe	I	II	III	IV				V	VI
Método de financiamento	Pay-as-you go	Terminal Funding	Unit Credit	Entry age	Individual Level	Aggregate	Attained Age	Initial Funding	Complete Funding
Período de amortização	-	-	20 anos	20 anos	-	-	20 anos	20 anos	20 anos

Responsabilidade Suplementar

-	385 702	866 095	1 037 735	1 037 735	1 037 735	1 037 735	1 080 890	1 155 756

Custo Normal

65 420	43 588	16 396	6 680	6 680	6 680	6 680	4 238	-

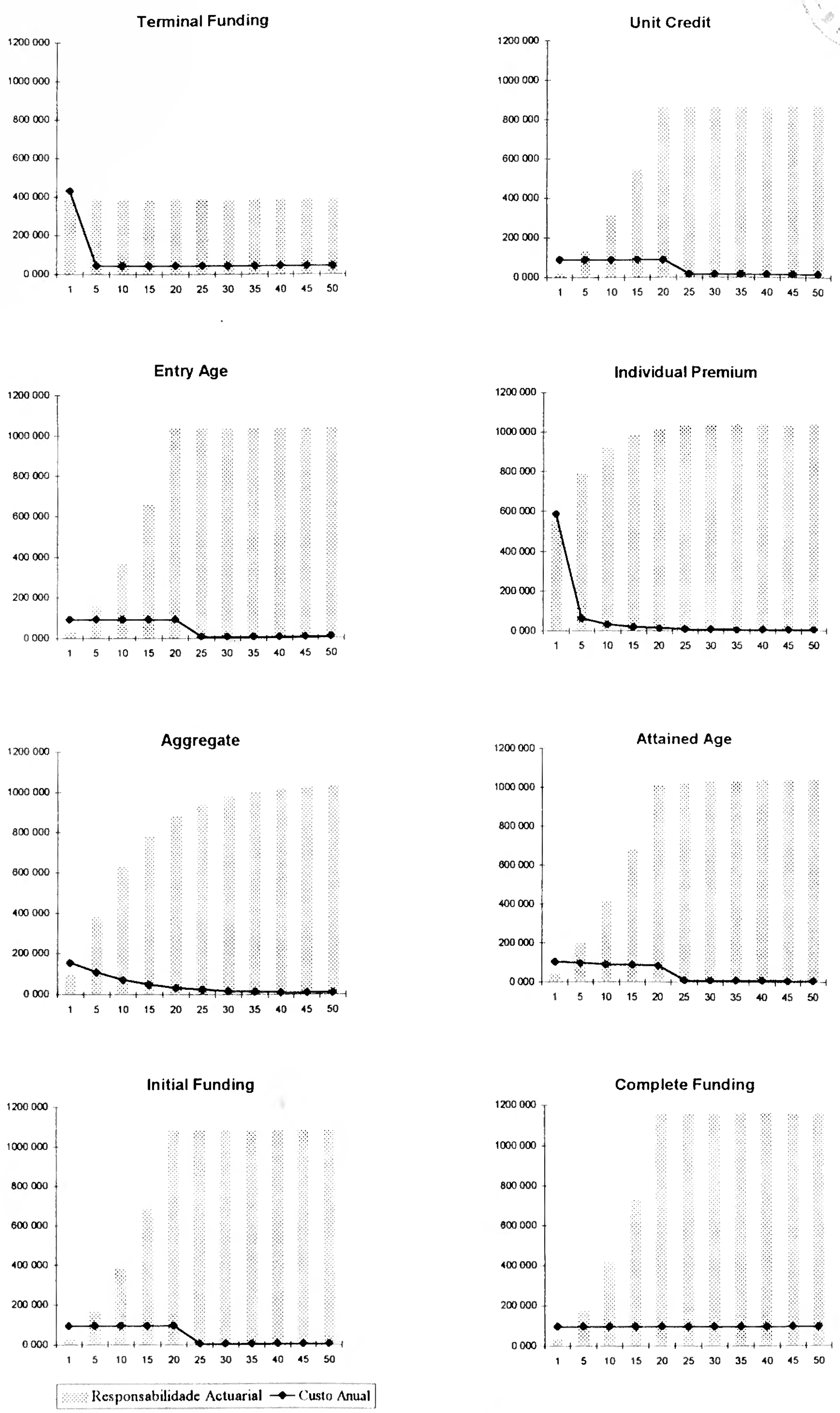
Custo Anual

no início do ano									
1	65 420	429 290	87 632	92 034	585 260	152 960	102 111	93 140	95 060
2	"	43 588	"	"	111 711	139 880	99 947	"	"
3	"	"	"	"	89 144	127 969	97 977	"	"
4	"	"	"	"	74 045	117 124	96 184	"	"
5	"	"	"	"	62 819	107 248	94 550	"	"
10	"	"	"	"	32 334	69 639	89 352	"	"
15	"	"	"	"	19 038	46 095	85 076	"	"
20	"	"	"	"	12 410	31 355	82 398	"	"
25	"	"	16 396	6 680	9 154	22 127	9 486	4 238	-
30	"	"	"	"	7 535	16 351	8 437	"	-
35	"	"	"	"	6 841	12 734	7 780	"	-
40	"	"	"	"	6 680	10 470	7 369	"	-
45	"	"	"	"	"	9 053	7 111	"	-
50	"	"	"	"	"	8 166	6 950	"	-
limite	65 420	43 588	16 396	6 680	6 680	6 680	6 680	4 238	-

Responsabilidade Actuarial

no final do ano									
1	-	385 702	23 544	28 210	551 030	92 792	38 892	29 384	31 419
2	-	"	48 501	58 113	633 160	177 286	77 824	60 530	64 723
3	-	"	74 956	89 811	696 296	254 226	117 005	93 545	100 025
4	-	"	102 998	123 410	747 216	324 285	156 634	128 542	137 445
5	-	"	132 722	159 024	789 292	388 080	196 910	165 638	177 110
10	-	"	310 334	371 835	921 230	631 030	414 706	387 298	414 124
15	-	"	548 019	656 624	984 702	783 125	677 547	683 930	731 301
20	-	"	866 095	1 037 735	1 015 480	878 341	1 011 372	1 080 890	1 155 756
25	-	"	"	"	1 029 871	937 950	1 021 231	"	"
30	-	"	"	"	1 035 845	975 266	1 027 403	"	"
35	-	"	"	"	1 037 549	998 628	1 031 267	"	"
40	-	"	"	"	1 037 735	1 013 253	1 033 686	"	"
45	-	"	"	"	"	1 022 408	1 035 200	"	"
50	-	"	"	"	"	1 028 140	1 036 148	"	"
limite	-	385 702	866 095	1 037 735	1 037 735	1 037 735	1 037 735	1 080 890	1 155 756

(contos)



Abcissa - Anos após a constituição do Fundo de Pensões
Ordenada - Montante em contos

Figura 2 - Evolução da Responsabilidade Actuarial e do Custo Normal

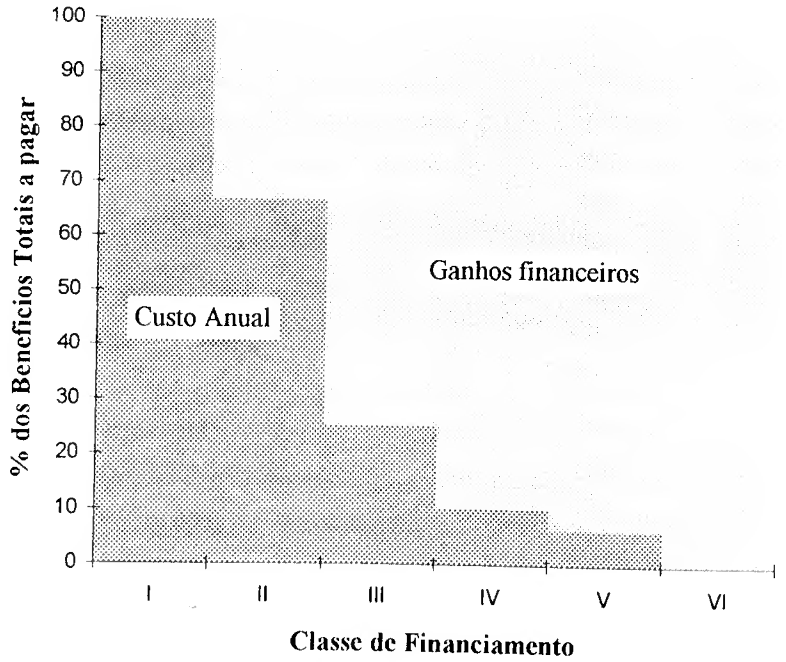


Figura 3 - Contribuições e Rendimentos

Como podemos constatar no Quadro 5 o Custo Normal decresce (a Responsabilidade Suplementar cresce) à medida que se avança nas diversas classes. Assim, embora existam 4 métodos diferentes pertencentes à Classe IV estes têm o mesmo valor para o Custo Normal e a Responsabilidade Suplementar.

O Quadro 5 para além de permitir comparar as diversas classes ilustra a evolução do Custo Anual e da Responsabilidade Actuarial ao longo dos 50 anos após a constituição do Fundo de Pensões. Assim, constata-se através deste quadro que, para um determinado método, os valores do Custo Anual e da Responsabilidade Actuarial tendem respectivamente para o Custo Normal e a Responsabilidade Suplementar.

A figura 2 permite visualizar a evolução dos Custos Anuais e da Responsabilidade Actuarial, e comparar com os diversos métodos .

Através da figura 3 verificamos que à medida que a classe aumenta os ganhos financeiros são maiores, sendo no extremo iguais à responsabilidade assumida - Complete Funding.

Vejamos como foram obtidos estes resultados:

Pay-as-you-go

De acordo com as hipóteses consideradas teremos $B_r = 654.202$ contos. No Pay-as-you-go os benefícios são pagos em cada ano não havendo portanto Responsabilidade Suplementar. Relativamente ao Custo Normal este será o valor total das pensões pagas anualmente, ou seja,

$$654.202 \sum_{65}^{89} l_x = 65\ 420$$

Terminal Funding

No Terminal Funding, e em qualquer instante, a Responsabilidade Actuarial resulta do valor total dos capitais de cobertura para todos os reformados existentes nesse instante. Assim,

$$(RA)_t = RA = RS = 654.202 \sum_{x=66}^{89} l_x a_x = 385\ 702$$

O Custo Normal é igual ao capital de cobertura para todos os indivíduos que se reformam nesse ano. De acordo com os pressupostos utilizados $a_{65} = 9.518247$ obtemos

$$CN = 7 \times 654.202 \times 9.518247 = 43\ 588$$

O Custo anual será sempre igual ao Custo Normal à excepção do primeiro ano que terá o valor

$$(CA)_{t=0} = 43\ 588 + 385\ 702 = 429\ 290$$

já que se fez a amortização total da Responsabilidade Suplementar.

Unit Credit

No inicio do plano existem activos que foram admitidos para a empresa antes da implementação do plano, o que significa que existem responsabilidades por financiar relativas ao tempo de serviço passado. Assim,

$$RS = \frac{654.202}{65-25}\sum_{26}^{64} l_x \times (x-25) \times {}_{65-x|}a_x + 654.202\sum_{x=65}^{89} l_x \times a_x = 866\ 095$$

Esta responsabilidade será no nosso exemplo amortizada em 20 anos através de uma renda certa antecipada calculada à taxa de rendimento do Fundo, sendo a contribuição anual de 71 236.

O Custo Normal resulta de

$$\frac{654.202}{65-25}\sum_{x=25}^{64} l_x \times {}_{65-x|}a_x = 16\ 396$$

O Custo Anual será igual

$$(CA)_t = \begin{cases} 16\ 396 + 71\ 236 = 87\ 632 & \Leftarrow t \le 20 \\ 16\ 396 & \Leftarrow t > 20 \end{cases}$$

A Responsabilidade Actuarial resulta da soma da Responsabilidade Actuarial do ano anterior com o Custo Anual desse ano retirando as pensões pagas e capitalizando um ano. Assim,

$$(RA)_{t=1} = (87\ 632 - 654.202 \times 100) \times 1.06 = 23\ 544$$

$$(RA)_{t=2} = (23\ 544 + 87\ 632 - 654.202 \times 100) \times 1.06 = 48\ 501$$

(...)

Repare-se que após os primeiros 20 anos a Responsabilidade Actuarial fica constante e igual à Responsabilidade Suplementar.

Entry-Age

A Responsabilidade Suplementar toma o valor de

$$RS = 654.202\sum_{x=25}^{64} l_x \left({}_{65-x|}a_x - \frac{{}_{65-25|}a_{25}}{a_{25:\overline{65-25|}}} \right) \times a_{x:\overline{65-x|}} +$$

$$+654.202\sum_{x=65}^{89} l_x \times a_x = 1\ 037\ 735$$

sendo amortizada em 20 anos, o que se traduz numa contribuição anual de 85 354 contos.

O Custo Normal resulta de

$$CN = 654.202 \times \frac{0.064777}{6.343214} \times 1\ 000 = 6\ 680$$

O Custo Anual e a Responsabilidade Actuarial calculam-se do mesmo modo que no método anterior.

Individual Level Premium

Este método tem a mesma Responsabilidade Suplementar e o Custo Normal que o Entry-Age apenas diferindo na Responsabilidade Actuarial e no Custo Anual. O Custo Anual resulta de

$$CA = 654.202 \sum_{x=25}^{64} l_x \frac{{}_{65-x|}a_x}{\ddot{a}_{x:\overline{65-x}|}}$$

que no limite será igual ao Custo Normal.

Aggregate

Sabendo que

$$\sum_{x=25}^{64} l_x \times {}_{65-x|}a_x = 1\ 002.501$$

$$\sum_{x=65}^{84} l_x \times a_x = 656.205$$

$$\sum_{x=25}^{64} l_x \times a_{x:\overline{65-x}|} = 7\ 093.925$$

então

$$(CA)_{t=1} = \frac{654.202 \times (1\ 002.501 + 656.205)}{7\ 093.925} \times 1\ 000 = 152\ 960$$

$$(RA)_{t=1} = (152\ 960 - 654.202 \times 100) \times 1.06 = 92\ 792$$

$$(CA)_{t=2} = \frac{654.202 \times (1\ 002.501 + 656.205) - 92\ 792}{7\ 093.925} \times 1\ 000 = 139\ 880$$

$$(RA)_{t=2} = (92\ 792 + 139\ 880 - 654.202 \times 100) \times 1.06 = 177\ 286$$

(...)

Attained Age

Sabendo que

$$\sum_{x=25}^{64} (65 - x) \times l_x \times {}_{65-x|}a_x = 13\ 392.381$$

então

$$(CA)_{t=1} = \frac{\frac{654.202}{65-25} \times 13\ 392.381}{7\ 093.925} \times 1\ 000 + 71\ 236 = 102\ 111$$

$$(CA)_{t=2} = \frac{\frac{654.202}{65-25} \times 13\ 392.381 - (102\ 111 - 87\ 632) \times 1.06}{7\ 093.925} \times 1\ 000 + 71\ 236 = 99\ 947$$

(...)

Initial Funding

Sabendo que $\sum_{x=26}^{64} l_x \times {}_{65-x|}a_x = 996.023$

A Responsabilidade Suplementar resulta de

$$RS = 654.202 \times (996.023 + 656.205) = 1\ 080\ 890$$

o que significa uma contribuição anual de 88 903 contos referente à amortização.

O Custo Normal é igual a $654.202 \times 100 \times 0.064777 = 4\ 238$.

Complete Funding

Teremos que calcular a Responsabilidade Suplementar de modo a que o rendimento desta consiga pagar as reformas do ano que são pagas no inicio do ano,

$$.06 \times RS = 654.202 \times 100 \times 1.06 \Leftrightarrow RS = 1\ 155\ 756$$

o que se traduz num Custo Anual de 95 060 contos durante 20 anos.

CAPÍTULO II

Introdução de condições dinâmicas nos Fundos de Pensões

CONDIÇÕES DINÂMICAS

Existem diversos estudos sobre o cálculo das responsabilidades inerentes a um Plano de Pensões, mas para a maioria deles as hipóteses consideradas são estáticas, ou seja, não variam com o tempo. Assim, propomo-nos neste capitulo estudar as funções utilizadas numa avaliação actuarial pressupondo que a população e o salário se comportam de um modo dinâmico embora com algumas restrições. No Capitulo III estudaremos os Ganhos e Perdas Actuariais considerando que a taxa de rendimento verificada é uma variável e aleatória. Os três trabalhos de Bowers, Hickman e Nesbitt datados de 1976, 1979 e 1982 foram imprescindíveis para apresentação deste capítulo.

1. DIAGRAMAS DE LEXIS

Os **Diagramas de Lexis** permitem uma melhor compreensão das características da população dinâmica assim como das funções actuariais que iremos estudar.

Nos Diagramas de Lexis aqui apresentados o tempo t é representado no eixo das abcissas enquanto que a idade x dum indivíduo é traduzida no eixo das ordenadas. Um ponto (t, x) representa assim um indivíduo de idade x no instante t.

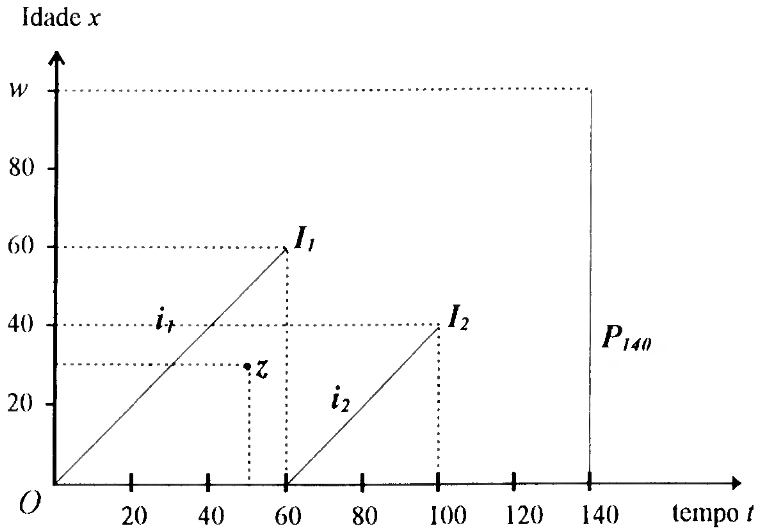


Figura 1 - Linhas de vida

A vida dos indivíduos que nasceram em $t = 0$ e morreram aos 60 anos é representada na Figura 1 pelo segmento de recta $[OI_1]$. As linhas de vida dos diversos indivíduos nascidos em instantes diferentes são representadas por segmentos de recta paralelos a $[OI_1]$.

O ponto z representa os indivíduos de 30 anos existentes no instante $t = 50$, e a semi-recta i_2 a vida dos indivíduos que nasceram em $t = 60$ e morreram em $t = 100$ com 40 anos de idade.

O diagrama permite, ainda, descrever a população num instante t qualquer. Para isso basta traçar um segmento de recta compreendido entre $y = 0$ e $y = w$ e paralelo ao eixo das ordenadas. Assim, P_{140} representa a população existente no instante $t = 140$.

Uma semi-recta paralela ao eixo das abcissas com origem em (0, y) representa os indivíduos pertencentes a várias gerações e cuja idade é y.

Supondo apenas o benefício por velhice, os indivíduos de uma determinada geração poderão passar por três períodos distintos que são traduzidos Figura 2 através de três faixas horizontais. Supondo que todos os indivíduos começam a trabalhar aos a anos de idade e se reformam por velhice aos r anos de idade temos:

- a 1ª faixa, que se designa por **J**, corresponde aos jovens de idades compreendidas entre $y = 0$ e $y = a$

- a 2ª faixa, **A**, representa os activos com idades compreendidas entre a e r

- a 3ª faixa, **R**, corresponde aos reformados, indivíduos com idade superior a r e não superior a w.

Neste estudo apenas se tem em conta o período activo e inactivo.

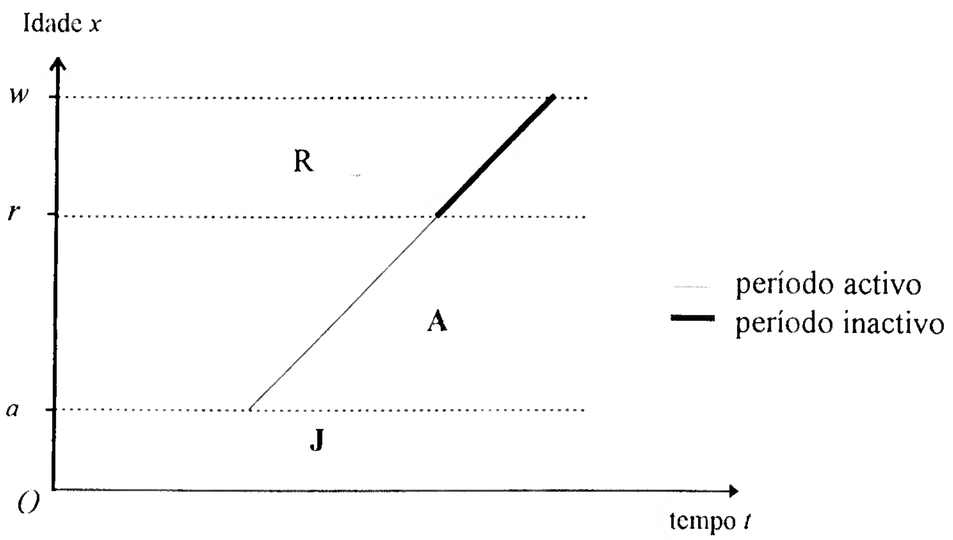


Figura 2 - Período activo e inactivo dos membros de um plano de pensões

Um determinado instante t é caracterizado por uma linha vertical paralela ao eixo das ordenadas e que passa por $(t,0)$. O número de activos nesse instante resulta do número de intersecções, na 2ª faixa, das linhas de vida com essa linha vertical. O número de reformados é dado de modo semelhante mas através da 3ª faixa.

O grupo de activos com idade x_0 em diversos instantes é dada por uma linha horizontal paralela ao eixo das abcissas e que passa por $(x_0,0)$. Se $x_0 < r$ ($x_0 > r$) então o número de activos (reformados) com idade x_0 resulta da contagem das intersecções dessa linha com as várias linhas de vida nos diversos instantes.

Se um determinado membro do plano tem idade x, no instante t, então nasceu no instante $u = t - x$ e entrou para o plano no instante $t - x + a$.

Os indivíduos que se encontram na faixa A poderão sair antes de atingir a idade r por outro motivo que não a morte, como por exemplo a Invalidez e a Reforma Antecipada.

No entanto, e de acordo com a hipótese de que o plano de pensões apenas garante benefício por velhice, para os pensionistas a única saída possível é a morte.

2. CONDIÇÕES DINÂMICAS

2.1. População

É mais usual pressupor, no cálculo das responsabilidades inerentes a um plano de pensões, que a população seja estacionária. É que para além de as tábuas de mortalidade estacionárias serem mais conhecidas e de fácil acesso, também são mais fáceis de construir. As tábuas dinâmicas têm inerente um processo mais complexo de construção e têm ainda uma aplicação prática mais difícil mesmo em termos informáticos.

No entanto torna-se interessante o uso de populações dinâmicas tanto pelo seu valor académico como pela possibilidade de análise dos valores obtidos pelos dois tipos de tábuas.

Pressupor que a população é dinâmica significa que o número de indivíduos de idade x, que representaremos através da função $l_{x,t}$, varia com o instante t considerado, surgindo assim o conceito de geração.

Vamos organizar uma tabela com os vários valores de $l_{x,t}$ construída a partir de uma geração conhecida de indivíduos. Para essa geração representamos o número de indivíduos de idade x por l_x e por uma questão de simplificação consideramos que essa geração atingiu os r anos de idade no instante $t = 0$. Suponhamos que

$$l_{x,t} = l_x \cdot g(t + r - x) \tag{1}$$

com g uma função contínua em $\Re$. Se a população fosse estacionária teríamos $g(t) = 1, \forall t$.

A Figura 3 permite uma melhor compreensão desta função. A linha a sombreado representa a geração considerada como ponto de partida. Obtêm-se os vários valores de $l_{x,t}$ com t fixo através das linhas verticais da tabela. Para x fixo o valor de $l_{x,t}$ é dado através de diagonais à tabela.

As linhas horizontais representam gerações. A geração considerada como ponto de partida é a geração $\underline{0}$. As outras gerações serão representadas por um número negativo (positivo) se forem anteriores (posteriores) à geração $\underline{0}$. Por exemplo, todos os indivíduos da geração $\underline{-2}$ nasceram dois anos mais cedo que os da geração $\underline{0}$, enquanto que na geração $\underline{5}$ todos os indivíduos nasceram cinco anos mais tarde que os da geração $\underline{0}$.

Instante

Geração	...	$-(r-a)$	$-(r-a-1)$	$-(r-a-2)$	$-(r-a-3)$	...	-1	0	1	...	$w-r$	$w-r+1$	$w-r+2$	...
...	-	-	-	-	-	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	-	-	-	-	-	...	$l_{r-6}g(5)$	$l_{r-5}g(5)$	$l_{r-4}g(5)$	...	$l_{w-5}g(5)$	$l_{w-4}g(5)$	$l_{w-3}g(5)$	...
4	-	-	-	-	-	...	$l_{r-5}g(4)$	$l_{r-4}g(4)$	$l_{r-3}g(4)$	...	$l_{w-4}g(4)$	$l_{w-3}g(4)$	$l_{w-2}g(4)$	...
3	-	-	-	-	$l_a g(3)$	...	$l_{r-4}g(3)$	$l_{r-3}g(3)$	$l_{r-2}g(3)$	...	$l_{w-3}g(3)$	$l_{w-2}g(3)$	$l_{w-1}g(3)$	...
2	-	-	-	$l_a g(2)$	$l_{a+1} g(2)$	...	$l_{r-3}g(2)$	$l_{r-2}g(2)$	$l_{r-1}g(2)$	...	$l_{w-2}g(2)$	$l_{w-1}g(2)$	$l_w g(2)$	...
1	-	-	$l_a g(1)$	$l_{a+1} g(1)$	$l_{a+2} g(1)$	...	$l_{r-2}g(1)$	$l_{r-1}g(1)$	$l_r g(1)$	...	$l_{w-1}g(1)$	$l_w g(1)$	-	-
0	-	l_a	l_{a+1}	l_{a+2}	l_{a+3}	...	l_{r-1}	l_r	l_{r+1}	...	l_w	-	-	-
-1	...	$l_{a+1} g(-1)$	$l_{a+2} g(-1)$	$l_{a+3}g(-1)$	$l_{a+4}g(-1)$	...	$l_r g(-1)$	$l_{r+1}g(-1)$	$l_{r+2}g(-1)$	...	-	-	-	-
-2	...	$l_{a+2}g(-2)$	$l_{a+3}g(-2)$	$l_{a+4}g(-2)$	$l_{a+5}g(-2)$	...	$l_{r+1}g(-2)$	$l_{r+2}g(-2)$	$l_{r+3}g(-2)$	...	-	-	-	-
-3	...	$l_{a+3}g(-3)$	$l_{a+4}g(-3)$	$l_{a+5}g(-3)$	$l_{a+6}g(-3)$	...	$l_{r+2}g(-3)$	$l_{r+3}g(-3)$	$l_{r+4}g(-3)$	...	-	-	-	-
-4	...	$l_{a+4}g(-4)$	$l_{a+5}g(-4)$	$l_{a+6}g(-4)$	$l_{a+7}g(-4)$	...	$l_{r+3}g(-4)$	$l_{r+4}g(-4)$	$l_{r+5}g(-4)$	...	-	-	-	-
-5	...	$l_{a+5}g(-5)$	$l_{a+6}g(-5)$	$l_{a+7}g(-5)$	$l_{a+8}g(-5)$	...	$l_{r+4}g(-5)$	$l_{r+5}g(-5)$	$l_{r+6}g(-5)$	...	-	-	-	-
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-	-

Figura 3 - Tábua de Mortalidade dinâmica

Repare-se que do modo como definimos $l_{x,t}$ obtemos, para a probabilidade dum membro com x anos no instante t atingir os y anos como membro do plano, a seguinte expressão independente de t

$$_{y-x}p_{x,t} = \frac{l_{y,t+y-x}}{l_{x,t}} = \frac{l_y \cdot g_{t+y-x+r-y}}{l_x \cdot g_{t+r-x}} = \frac{l_y}{l_x} = {}_yp_x \tag{2}$$

Nestas condições a renda vitalícia $\bar{a}_x^h$ com $x \geq r$ não depende de t se a taxa de rendimento do fundo e de crescimento das pensões forem independentes de t e a força de mortalidade é constante.

A escolha de uma tábua dinâmica construída a partir duma função $g(t)$ deveu-se ao facto de esta permitir a simplificação das equações apresentadas nas secções seguintes, não sendo na prática a mais adequada já que, do modo como foi construída, o que se altera de geração para geração é o número de indivíduos em cada instante, mantendo-se no entanto constante a força de saída.

Com o avanço observado na *Teoria da População* existem hoje técnicas para a construção de tábuas dinâmicas tendo em conta vários factores como, por exemplo, a taxa de natalidade, o avanço da medicina em cada geração e com uma força de saída "dinâmica". A utilização de uma dessas tábuas para esta análise teórica seria difícil e complexa, sendo no entanto interessante calcular as responsabilidades de um plano com uma tábua dinâmica e comparar com os resultados obtidos com uma tábua estacionária, até porque os actuários portugueses apenas utilizam nesse cálculo tábuas estacionárias.

Através da utilização de Diagramas de Lexis torna-se fácil interpretar a função $l_{x,t}$ assim como o cálculo integral desta. Na Figura 4 poderemos visualizar $l_{x,t}dt$ que representa o número de activos que atingem a idade x entre os instantes t e $t+dt$.

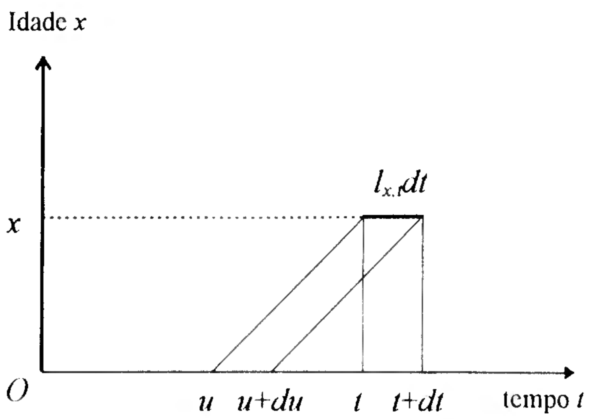


Figura 4 - número de activos que atingem a idade x entre os instantes t e $t+dt$

O número de activos com idade x entre t_0 e t_1 resulta da expressão

$$\int_{t0}^{t1} l_{x,t}\,dt \tag{3}$$

e que graficamente é representado na Figura 5 através dum triângulo.

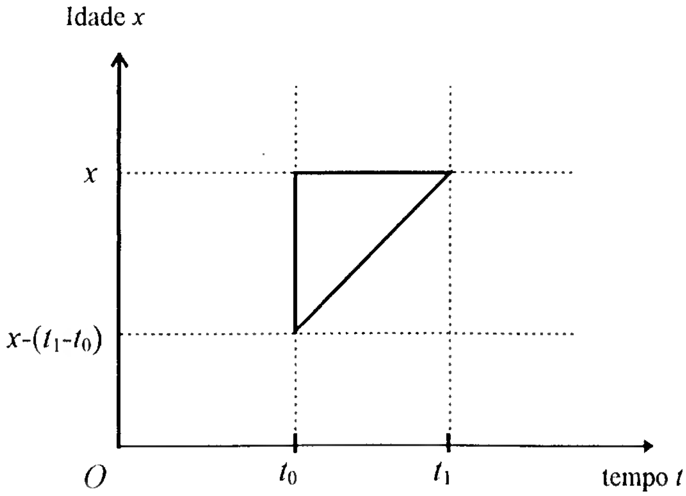


Figura 5 - número de activos com idade x entre t_0 e t_1

Por outro lado o número de indivíduos que no instante t_0 têm idades compreendidas entre x_0 e x_1 está representado no triângulo da Figura 6:

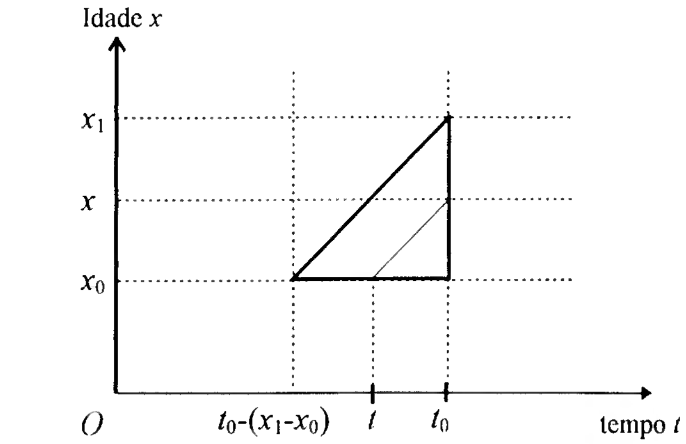


Figura 6 - número de indivíduos que no instante t_0 têm idades compreendidas entre x_0 e x_1

Como poderemos constatar através da figura anterior os activos que estão nessas condições são aqueles que atingiram a idade x_0 no instante t, com $t_0-(x_1-x_0)\le t\le t_0$ e t_0, e viveram pelo menos até à idade $x=x_0+(t_0-t)$.

$$\int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l_{x_0,t}\cdot{}_{t_0-t}p_{x_0,t}dt = \int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l_{x_0,t}\cdot\frac{l_{x_0+t_0-t,t_0}}{l_{x_0,t}}dt =$$

$$= \int_{t_0-(x_1-x_0)}^{t_0} l_{x_0+t_0-t,t_0}dt \tag{4}$$

Se considerarmos $x = x_0 + t_0 - t$ obtemos

$$t = x_0 + t_0 - x \Leftrightarrow t_0 + x_0 = x + t$$

$$t_0 - (x_1 - x_0) = -x_1 + (t_0 + x_0) \Leftrightarrow t_0 - (x_1 - x_0) = -x_1 + x + t \Leftrightarrow$$
$$t_0 = -x_0 + x + t$$

$$dt = -dx$$

Podemos então escrever (4) doutro modo :

$$\int_{-x_1+x+t}^{-x_0+x+t} -l_{x,t_0}dx = \int_{x_0}^{x_1} l_{x,t_0}dx \tag{5}$$

Donde concluímos que $l_{x,t}dx$ é o número de indivíduos com idades compreendidas entre x e $x+dx$. Assim a função $l_{x,t}$ tem duas interpretações: $l_{x,t}dt$ e $l_{x,t}dx$.

A força de saída, que representamos por $\mu_{x,t}$, expressa a saída dos membros do plano no instante em que estes atingem a idade x:

$$\mu_{x,t} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}l_{x,t}}{l_{x,t}} = \mu_x \tag{6}$$

2.2. Salário

Os benefícios a conceder aos futuros pensionistas de um plano de pensões, assim como o Custo Normal, são muitas vezes indexados aos salários, sendo portanto necessário estimar o salário futuro.

Geralmente o salário pode ser decomposto em três factores:

- o crescimento do salário por mérito
- o crescimento devido a ganhos na produtividade
- o crescimento devido à componente inflação

A componente **mérito** do salário corresponde ao que o empregado recebe a mais (ou a menos) ao progredir na carreira, e é normalmente função da antiguidade na empresa e portanto da idade do indivíduo.

O segundo factor, a **produtividade**, afecta todo o grupo de trabalhadores. Este factor varia com o tipo de indústria, e depende do instante em estudo.

O terceiro factor, a **inflação**, é o mais importante. Faz crescer o salário a uma taxa composta constante. Normalmente usa-se uma taxa de inflação mais baixa que a actual dado estarmos a trabalhar a longo prazo.

Considerando s_a o salário inicial à data de entrada para a empresa poderemos factorizar o salário anual esperado no instante t para o indivíduo de idade x de acordo com a seguinte expressão

$$s_{x,t} = s_a\left(s_x^m \times s_t^p \times s_t^i\right),\ a \leq x \leq r \tag{7}$$

onde s_x^m representa o crescimento do salário inicial, verificado desde a idade a até à idade x, devido à progressão na carreira e s_t^p e s_t^i representam o crescimento acumulado desde o instante $t\text{-}x\text{+}a$ a t, devido à produtividade e à inflação verificadas nesse período.

Por razões de simplificação das equações a apresentar posteriormente iremos utilizar a função s_t^g de modo a que

$$s_t^g = s_t^p \cdot s_t^i$$

Assim, $s_{x,t} = s_x^m \cdot s_t^g$.

A **Massa Salarial** para o grupo de activos no instante t é

$$(MS)_t = \int_a^r l_{x,t} \cdot s_{x,t} dx = \int_a^r l_x \cdot g(t + r - x) \cdot s_{x,t} dx \tag{8}$$

FUNÇÕES AUXILIARES

As funções $M_{x,t}$, $P_r(t)$ e $^{T}(CN)_t$ têm por objectivo simplificar a descrição das secções seguintes, principalmente aquela em que se pressupõe que a população e o salário têm um crescimento exponencial.

A função $M_{x,t}$ é muito importante no nosso estudo pois permite que o modelo seja analisado em geral, não sendo necessário particularizar para um determinado método de financiamento. Para obter cada caso particular substitui-se, nas várias expressões que vamos apresentar de seguida, $M_{x,t}$ e $m_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x} M_{x,t}$ por uma fórmula especifica.

1. $M_{x,t}$

Vamos definir para cada método a função $M_{x,t}$ que representa, para um determinado indivíduo de idade x no instante t, a proporção do Valor Actual dos Benefícios Totais já amortizada. $M_{x,t}$ é não decrescente com $0 \le M_{x,t} \le 1$ para $x \ge a$.

$$M_{x,t} = \frac{(RA)_{x,t}}{(BT)_{x,t}} \tag{9}$$

Por exemplo para o Terminal Funding tem-se $M_{x,t} = 0$ para $a \le x < r$ e $M_{x,t} = 1$ para $x \ge r$, já que este método não reconhece nenhuma obrigação até à idade r. No método Initial Funding temos $M_{x,t} = 1$ para $x \ge a$. Para os restantes métodos assume-se $M_{a,t} = 0$ e $M_{x,t} = 1$ para $x \ge r$.

O bocadinho de pensão, $m_{x,t}$, que (x) adquiriu no instante t em que atingiu os x anos de idade será obtido através da expressão:

$$m_{x,t} = \frac{(CN)_{x,t}}{(BT)_{x,t}} \tag{10}$$

A função $M_{x,t}$ pode então ser definida em termos da função $m_{x,t}$:

$$M_{x,t} = \int_a^x m_{y,t+y-x} dy, \quad x \ge a \tag{11}$$

Vejamos, por exemplo, quais as expressões obtidas para $m_{x,t}$ e $M_{x,t}$ no caso dos métodos Unit Credit e Entry Age[1]. Nestes casos particulares estas funções são constantes em ordem a t.

[1] Ver demonstração no Anexo VII.

Unit Credit:

$$m_x = \frac{1}{r-a} \tag{12}$$

$$M_x = \int_a^x \frac{1}{r-a} dy = \frac{x-a}{r-a} \tag{13}$$

Entry Age:

$$m_x = \frac{s_x^m \cdot D_x}{\int_a^r s_y^m \cdot D_y dy} \tag{14}$$

$$M_x = \frac{\int_a^x s_y^m \cdot D y dy}{\int_a^r s_y^m \cdot D y dy} \tag{15}$$

Em geral assume-se que $m_{x,t}$ é contínua para $x \in]a,r[$, é continua á direita de a e à esquerda de r e que $m_{x,t} = 0$ para $x > r$. Representando $\frac{\partial}{\partial x} M_{x,t}$ por $M'_{x,t}$ e tendo em conta o Teorema Fundamental da Análise[2] obtemos

$$\begin{cases} m_{x,t} = M'_{x,t} & a < x < r \\ m_{a,t} = M_{a,t}^{'(d)} \\ m_{r,t} = M_{r,t}^{'(e)} \end{cases} \tag{16}$$

com $M_{a,t}^{'(d)}$ e $M_{r,t}^{'(e)}$ as derivadas parciais em ordem a x, á direita e á esquerda de, respectivamente, a e r.

Repare-se que como supusemos que $M_{x,s} = 1$ para $x \geq r$ e s qualquer obtemos as seguintes relações para um indivíduo que atinge a idade x no instante t

$$\int_a^r m_{y,t+y-x} dy = 1 \tag{17}$$

[2] Ver Anexo III

$$\int_x^r m_{y,t+y-x}dy = \int_a^r m_{y,t+y-x}dy - \int_a^x m_{y,t+y-x}dy = 1 - M_{x,t} \tag{18}$$

Verifica-se a relação

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = 0 \tag{19}$$

cuja demonstração está feita no Anexo VII.

2. P_x, P_t^r e $^T(CN)_t$

Tendo em conta as hipóteses em consideração, a pensão dum reformado com x anos em qualquer instante t, tem o valor

$$P_x = B_r \cdot h(x) \tag{20}$$

Seja P_t^r o montante total de pensões pagas no instante t aos novos beneficiários:

$$P_t^r = l_{r,t} \cdot B_r \tag{21}$$

Repare-se que $^T(CN)_t = P_t^r \cdot \bar{a}_r^h$ representa o Custo Normal para o Terminal Funding.

Verificam-se as relações

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{t+r-x}^r = -\frac{\partial}{\partial x} P_{t+r-x}^r \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}^T(CN)_{t+r-x} = -\frac{\partial}{\partial x} {}^T(CN)_{t+r-x} \tag{23}$$

que irão ser utilizadas posteriormente.

INTERPRETAÇÃO DAS FUNÇÕES ACTUARIAIS

Pretende-se nesta secção estudar o comportamento de algumas das funções actuariais descritas no capítulo anterior. A primeira derivada permite estudar a monotonia de uma dada função e conhecer quais os factores que estão na origem da variação dos seus valores.

Nesta secção vamos considerar as seguintes hipóteses:

- beneficio apenas por velhice
- os benefícios não são indexados aos salários
- as entradas para o plano ocorrem dum modo contínuo
- as saídas são apenas por morte, o que significa que μ_x representa a força de mortalidade
- a idade de entrada na empresa e a idade normal de reforma, respectivamente a e r, são únicas
- a população é dinâmica de acordo com a função $l_{x,t}$
- a taxa de rendimento i é constante (de igual modo a força de capitalização δ é constante)

No Anexo IV apresenta-se uma descrição das relações actuariais utilizadas neste capítulo.

1. FUNÇÕES INDIVIDUAIS

1.1. $(BT)_{x,t}$

O Valor Actual dos Benefícios Totais, $(BT)_{x,t}$, de acordo com os nossos pressupostos resulta da expressão (3) do capítulo I:

$$(BT)_{x,t} = \begin{cases} e^{-\delta(r-x)} \cdot \dfrac{l_r}{l_x} \cdot B_r \cdot \bar{a}_r^h \Leftarrow a \leq x \leq r \\ B_r \cdot \bar{a}_x^h \qquad\qquad \Leftarrow x > r \end{cases} \tag{24}$$

Como esta função é definida por dois ramos poderemos representar o ramo da função $(BT)_{x,t}$ com $a \leq x \leq r$ por $(aBT)_{x,t}$ e com $x > r$ por $(rBT)_{x,t}$, ou seja,

$$(aBT)_{x,t} = e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{l_r}{l_x} \cdot B_r \cdot \bar{a}_r^h \tag{25}$$

$$(rBT)_{x,t} = B_r \cdot \bar{a}_x^h \tag{26}$$

uma vez que o primeiro ramo corresponde aos activos e o segundo aos reformados.

Ao calcular a primeira derivada parcial em ordem a x poderemos estudar a monotonia da função BT, assim como os factores que estão na origem de variações da função quando o valor de x se altera. Através da expressão (27) podemos então concluir que o Valor Actual dos Benefícios Totais cresce proporcionalmente com a força de mortalidade e a força de capitalização e ainda, que para $x \geq r$ decresce à medida que as pensões vão sendo pagas.

$$\frac{\partial}{\partial x}(BT)_{x,t} = \begin{cases} (BT)_{x,t} \cdot (\mu_x + \delta) & \Leftarrow a < x < r \\ (BT)_{x,t} \cdot (\mu_x + \delta) - B_r \cdot h(x) & \Leftarrow x > r \end{cases} \tag{27}$$

Demonstração:

❑

$a < x < r$

$$\frac{\partial}{\partial x}(BT)_{x,t} =$$

$$= B_r \cdot \bar{a}_r^h \cdot l_r \left[\frac{\partial}{\partial x} e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{1}{l_x} + e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l_x}\right) \right] =$$

$$= B_r \cdot \bar{a}_r^h \cdot l_r \left[\delta \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{1}{l_x} + e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{\mu_x}{l_x} \right] =$$

$$= (\delta + \mu_x) \cdot (BT)_{x,t}$$

$x > r$

$$\frac{\partial}{\partial x}(BT)_{x,t} = B_r \cdot \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x^h = B_r \cdot \left[\bar{a}_x^h (\mu_x + \delta) - h(x) \right] = (BT)_{x,t} (\mu_x + \delta) - B_r \cdot h(x)$$

$x = r$

Não existe derivada neste ponto. ❑

1.2. $(CN)_{x,t}$

$$(CN)_{x,t} = \begin{cases} (BT)_{x,t} \, m_{x,t} & \Leftarrow a \leq x \leq r \\ 0 & \Leftarrow x > r \end{cases} \tag{28}$$

Através da relação (29) concluímos que o $(CN)_{x,t}$ cresce proporcionalmente com a força de mortalidade e com a força de capitalização. A expressão $(BT)_{x,t} \frac{\partial}{\partial x} m_{x,t}$ pode ter sinal negativo ou positivo consoante a monotonia da função $m_{x,t}$, que representa o bocadinho da pensão que se adquiriu em t.

$$\frac{\partial}{\partial x}(CN)_{x,t} = (CN)_{x,t}(\mu_x + \delta) + (BT)_{x,t} \frac{\partial}{\partial x} m_{x,t} \tag{29}$$

Demonstração:

❑

$$\frac{\partial}{\partial x}(CN)_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((BT)_{x,t} m_{x,t}\right) =$$

$$= (BT)_{x,t}(\mu_x + \delta) m_{x,t} + (BT)_{x,t} \frac{\partial}{\partial x} m_{x,t} =$$

$$= (CN)_{x,t}(\mu_x + \delta) + (BT)_{x,t} \frac{\partial}{\partial x} m_{x,t}$$

❑

1.3. $(RA)_{x,t}$

Podemos equacionar a função $(RA)_{x,t}$ através de $(BT)_{x,t}$ e $M_{x,t}$:

$$(RA)_{x,t} = \begin{cases} (BT)_{x,t} \cdot M_{x,t} & \Leftarrow a \leq x < r \\ (BT)_{x,t} & \Leftarrow x \geq r \end{cases} \tag{30}$$

De modo análogo à função $(BT)_{x,t}$ esta função tem dois ramos $(aRA)_{x,t}$ e $(rRA)_{x,t}$. Analisando (31) verifica-se que no período activo $(RA)_{x,t}$ cresce proporcionalmente com a força de mortalidade e com a força de capitalização e ainda com o Custo Normal. Para $x > r$ cresce com a força de mortalidade e de capitalização, ambas constantes neste período, e decresce com o pagamento de pensões.

$$\frac{\partial}{\partial x}(RA)_{x,t} = \begin{cases} (RA)_{x,t}(\mu_x + \delta) + (CN)_{x,t} & \Leftarrow a < x < r \\ (RA)_{x,t}(\mu_x + \delta) - B_r \cdot h(x) & \Leftarrow x > r \end{cases} \tag{31}$$

Demonstração:

❑

a < x < r

$$\frac{\partial}{\partial x}(RA)_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((BT)_{x,t} M_{x,t}\right) = (BT)_{x,t}(\mu_x + \delta) M_{x,t} + (BT)_x m_{x,t} =$$

$$= (RA)_{x,t}(\mu_x + \delta) + (CN)_{x,t}$$

x > r

$$\frac{\partial}{\partial x}(RA)_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x}(BT)_{x,t} = (BT)_{x,t}(\mu_x + \delta)) - B_r \cdot h(x)$$

$$= (RA)_{x,t}(\mu_x + \delta) - B_r \cdot h(x)$$

x = r

Não existe derivada neste ponto. ❑

1.4. $(CNF)_{x,t}$

Poderemos escrever

$$(CNF)_{x,t} = (BT)_{x,t} - (RA)_{x,t} \tag{32}$$

uma vez que

$$(CNF)_x = \int_x^r e^{-\delta(y-x)} \cdot {}_{y-x}p_x \cdot (CN)_{y,t+y-x} dy =$$

$$= \int_x^r e^{-\delta(y-x)} \cdot \frac{l_y}{l_x} \cdot \left[e^{-\delta(r-y)} \cdot \frac{l_r}{l_y} B_r \cdot \bar{a}_r^h \cdot m_{y,t+y-x} \right] dy =$$

$$= B_r \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \frac{l_r}{l_x} \cdot \bar{a}_r^h \int_x^r m_{y,t+y-x} dy =$$

$$= (BT)_{x,t}\left[1 - M_{x,t}\right] = (BT)_{x,t} - (RA)_{x,t}$$

De acordo com este resultado o Valor Actual dos Custos Normais Futuros representa o que ainda falta financiar para obter o Valor Actual dos Benefícios Totais.

De (33) concluímos que $(CNF)_x$ cresce proporcionalmente com a força de mortalidade e de capitalização e decresce com o Custo Normal pago á idade x.

$$\frac{\partial}{\partial x}(CNF)_{x,t} = (CNF)_{x,t}(\mu_x + \delta) - (CN)_{x,t} \tag{33}$$

Demonstração:

❑

$$\frac{\partial}{\partial x}(CNF)_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x}(BT)_{x,t} - \frac{\partial}{\partial x}(RA)_{x,t} =$$

$$= (BT)_{x,t}(\mu_x + \delta) - (RA)_{x,t}(\mu_x + \delta) - (CN)_{x,t} =$$

$$= (CNF)_{x,t}(\mu_x + \delta) - (CN)_{x,t}$$ ❑

2. FUNÇÕES AGREGADAS

Aqui as funções agregadas serão calculadas através da soma, para todos os membros, das funções individuais apresentadas anteriormente. Será introduzida a função P_t que representa o total das pensões pagas no instante t.

Por uma questão de simplificação das equações a apresentar vamos supor que para as funções individuais apresentadas anteriormente o valor de B_r é unitário.

2.1. P_t

O montante total de pensões pagas no instante t é

$$P_t = \int_r^w l_{x,t} \cdot B_r \cdot h(x) dx \tag{34}$$

Como os indivíduos com idade x r no instante t resultam dos novos beneficiários que surgiram no instante $t+r-x$ e que sobreviveram até ao instante t, poderemos formular (34) de um modo diferente:

$$P_t = \int_r^w P^r_{t+r-x} \cdot {}_{x-r}p_{r,t+r-x} \cdot h(x)dx = \int_r^w P^r_{t+r-x} \cdot \frac{l_x}{l_r} \cdot h(x)dx \tag{35}$$

Pela análise da equação (36) podemos concluir que a variação verificada no montante total das pensões pagas resulta dos novos beneficiários no instante t, da actualização das pensões que estão em pagamento através da taxa $h(x)$ e da redução do montante das pensões por morte dos pensionistas. Repare-se que estamos na presença de um efeito substituição já que aqueles que morrem são de certa maneira substituídos por aqueles que se reformam no instante t.

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = P^r_t + \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} dh(x) - \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} \cdot h(x) \cdot \mu_x dx \tag{36}$$

Demonstração:

❑

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = \int_r^w \left[\frac{\partial}{\partial t} P^r_{t+r-x} \right] \frac{l_x}{l_r} h(x)dx = \int_r^w \left[-\frac{\partial}{\partial x} P^r_{t+r-x} \right] \frac{l_x}{l_r} h(x)dx$$

$$= \left[-P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} h(x) \right]_r^w + \int_r^w \frac{P^r_{t+r-x}}{l_r} d\left[l_x \cdot h(x)\right] =$$

$$= P^r_t + \int_r^w \frac{P^r_{t+r-x}}{l_r} \left[l_x dh(x) + h(x) d[l_x]\right] =$$

$$= P^r_t + \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} dh(x) - \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} h(x) \mu_x dx$$ ❑

2.2. $(BT)_t$

O Valor actual dos Beneficios Totais no instante t resulta de

$$(BT)_t = \int_a^w l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \tag{37}$$

podendo ser representado como função de P^r_t

$$(BT)_t = \int_a^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} (BT)_{x,t} dx =$$

$$= \int_a^r P^r_{t+r-x} \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r dx + \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} \bar{a}^h_x dx \qquad (38)$$

Na equação (39) a primeira parcela traduz o valor actual das pensões futuras dos novos activos no instante $t+r-a$, a segunda tem em conta a variação do BT, no período activo e inactivo, devido à força de capitalização enquanto que a terceira parcela representa as pensões pagas no instante t.

$$\frac{\partial}{\partial t}(BT)_t = P^r_{t+r-a} \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}^h_r + \delta(BT)_t - P_t \qquad (39)$$

Demonstração:

❑

$$\frac{\partial}{\partial t}(BT)_t = \int_a^r \left[-\frac{\partial}{\partial x} P^r_{t+r-x} \right] \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r dx + \int_r^w \left[-\frac{\partial}{\partial x} P^r_{t+r-x} \right] \frac{l_x}{l_r} \bar{a}^h_x dx =$$

$$= \left[-P^r_{t+r-x} \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r \right]_a^r + \int_a^r P^r_{t+r-x} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r dx +$$

$$+ \left[-P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} \bar{a}^h_x \right]_r^w + \int_r^w P^r_{t+r-x} d\left[\frac{l_x}{l_r} \bar{a}^h_x \right] =$$

$$= -P^r_t \cdot \bar{a}^h_r + P^r_{t+r-a} \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}^h_r + \int_a^r P^r_{t+r-x} \delta \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r dx +$$

$$+ P^r_t \cdot \bar{a}^h_r + \int_r^w \frac{P^r_{t+r-x}}{l_r} \left[d[l_x] \bar{a}^h_x + l_x d\left[\bar{a}^h_x \right] \right] =$$

$$= P^r_{t+r-a} \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}^h_r + \int_a^r P^r_{t+r-x} \delta \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}^h_r dx +$$

$$+ \int_r^w \frac{P^r_{t+r-x}}{l_r} \left[-l_x \cdot \mu_x \bar{a}^h_x + l_x \left(\bar{a}^h_x \cdot (\mu_x + \delta) - h(x) \right) \right] =$$

$$= P^r_{t+r-a} \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}^h_r + \delta \cdot (aBT)_t + \delta(rBT)_t - \int_r^w P^r_{t+r-x} \frac{l_x}{l_r} h(x) dx =$$

$$= P^r_{t+r-a} \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}^h_r + \delta(BT)_t - P_t$$

❑

2.3. $(CN)_t$

$$(CN)_t = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (CN)_{x,t} dx = \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot \frac{l_x}{l_r} (CN)_{x,t} dx \tag{40}$$

As três primeiras parcelas da expressão (41) representam um efeito de substituição: Custo Normal daqueles que entram para o plano, daqueles que se reformam e daqueles que morrem. O quarto termo representa o resultado da variação no $(CN)_{x,t}$ devido à idade.

$$\frac{\partial}{\partial t}(CN)_t = P_{t+r-a}^r \cdot \frac{l_a}{l_r}(CN)_{a,t} - P_t^r \cdot (CN)_{r,t} -$$

$$- \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot \frac{l_x}{l_r} \cdot \mu_x \cdot (CN)_{x,t} dx + \int_a^r P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} d(CN)_{x,t} \tag{41}$$

<u>Demonstração:</u>

❑

$$\frac{\partial}{\partial t}(CN)_t = P_{t+r-a}^r \cdot \frac{l_a}{l_r} \cdot (CN)_{a,t} - P_t^r \cdot (CN)_{r,t} +$$

$$+ \int_a^r \frac{P_{t+r-x}^r}{l_r} \left[-\mu_x \cdot l_x \cdot (CN)_{x,t} + l_x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(CN)_{x,t} \right] dx =$$

$$= P_{t+r-a}^r \frac{l_a}{l_r}(CN)_{a,t} - P_t^r \cdot (CN)_{r,t} -$$

$$- \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot \frac{l_x}{l_r} \cdot \mu_x \cdot (CN)_{x,t} dx + \int_a^r P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} d(CN)_{x,t}$$ ❑

2.4. $(RA)_t$

$$(RA)_t = \int_a^w l_{x,t} \cdot B_r \cdot (RA)_{x,t} dx = \int_a^w P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} (RA)_{x,t} dx =$$

$$= \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}_r^h M_{x,t} dx + \int_r^w P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} \bar{a}_x^h dx \tag{42}$$

A variação no valor da Responsabilidade Actuarial resulta da força de capitalização que actua durante o período activo e inactivo, do Custo Normal pago e do pagamento de pensões:

$$\frac{\partial}{\partial t}(RA)_t = \delta(RA)_t + (CN)_t - P_t \tag{43}$$

Demonstração:

❑

Utilizando a relação $\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = 0$, enunciada na Secção anterior

$$\frac{\partial}{\partial t}(RA)_t = \int_a^r \left[-\frac{\partial}{\partial x} P_{t+r-x}^r \right] \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}_r^h M_{x,t} dx +$$

$$+ \int_r^w \left[-\frac{\partial}{\partial x} P_{t+r-x}^r \right] \cdot \frac{l_x}{l_r} \cdot \bar{a}_x^h dx =$$

$$= -P_t^r \cdot \bar{a}_r^h \cdot M_{r,t} + P_{t+r-a}^r \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}_r^h \cdot M_{a,t} +$$

$$+ \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot \delta \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}_r^h M_{x,t} dx +$$

$$+ \int_a^r P_{t+r-x}^r \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot \bar{a}_r^h m_{x,t} dx + P_t^r \cdot \bar{a}_r^h$$

$$+ \int_r^w \frac{P_{t+r-x}^r}{l_r} \cdot \left[-l_x \cdot \mu_x \bar{a}_x^h + l_x \cdot \left(\bar{a}_x^h (\mu_x + \delta) - h(x) \right) \right] dx \qquad ❑$$

Como por hipótese $M_{a,t} = 0$ e $M_{r,t} = 1$ teremos

$$\frac{\partial}{\partial t}(RA)_t = \delta(RA)_t + (CN)_t - P_t \tag{44}$$

ou seja,

$$(CN)_t + \delta \cdot (RA)_t = P_t + \frac{\partial}{\partial t}(RA)_t \tag{45}$$

que demonstra que o Custo Normal e o rendimento suposto são suficientes para cobrir as pensões e a variação verificada na Responsabilidade Actuarial. Vamos designar (45) por **equação de equilíbrio**.

No caso particular em que a população é estacionária com $(RA)_t$, $(CN)_t$ e P_t constantes ao longo do tempo teremos para a equação de equilíbrio a relação

$$CN + \delta \cdot RA = P \tag{46}$$

referida em *Trowbridge (1952)*.

2.5. $(CNF)_t$

O Valor Actual dos Custos Normais Futuros pode ser equacionado como

$$(CNF)_t = \int_a^r P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} (CN)_{x,t} dx \tag{47}$$

ou, utilizando a equação (32), como

$$(CNF)_t = \int_a^r P_{t+r-x}^r \frac{l_x}{l_r} \left[(BT)_{x,t} - (RA)_{x,t}\right] dx = (BT)_t - (RA)_t \tag{48}$$

A equação seguinte indica que o Valor Actual dos Custos Normais Futuros cresce com as novas entradas, pela taxa de rendimento e decresce á medida que os Custos Normais são pagos.

$$\frac{\partial}{\partial t}(CNF)_t = P_{t+r-a}^r \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}_r^h + \delta(BT)_t - (CN)_t \tag{49}$$

Demonstração:

❑

$$\frac{\partial}{\partial t}(CNF)_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[(BT)_t - (RA)_t\right] =$$

$$= P_{t+r-a}^r \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}_r^h + \delta(BT)_t - P_t - \delta(RA)_t - (CN)_t + P_t =$$

$$= P_{t+r-a}^r \cdot e^{-\delta(r-a)} \cdot \bar{a}_r^h + \delta\left(CNF\right)_t - (CN)_t$$ ❑

MÉTODOS DE CUSTO INDIVIDUAL E AGREGADO

Para além das hipóteses consideradas na secção anterior vamos supor que o plano de pensões foi implementado no instante $t = 0$.

Nesta secção vamos analisar os métodos de financiamento de Custo Individual e de Custo Agregado, tendo em conta três funções, F_t, C_t e $(\overline{RA})_t$, que correspondem a valores observados em determinado instante e que, de acordo com o que foi dito no capítulo anterior, representam

F_t = Valor do Fundo no instante t

C_t = Contribuição feita durante o ano t

$(\overline{RA})_t$ = Responsabilidade Actuarial não financiada no ano $t = (RA)_t - F_t$

O Valor do Fundo no ano t verifica a equação

$$\frac{dF_t}{dt} = C_t + \delta \cdot F_t - P_t \tag{50}$$

já que a variação no seu valor resulta das contribuições realizadas nesse período, do rendimento do fundo e das pensões pagas.

1. MÉTODOS DE CUSTO INDIVIDUAL

Se assumirmos que no ano t a Contribuição Anual, efectuada pelo grupo de participantes, cobre o Custo Normal e o aumento verificado na Responsabilidade Actuarial não financiada devido à força de capitalização δ teremos

$$C_t = (CN)_t + \delta \cdot \left(\overline{RA}\right)_t, \quad t \geq 0 \tag{51}$$

e portanto a expressão (50) ficará

$$\frac{dF_t}{dt} = (CN)_t + \delta \cdot \left(\left(\overline{RA}\right)_t + F_t\right) - P_t = (CN)_t + \delta \cdot (RA)_t - P_t \tag{52}$$

Mas de acordo com a equação de equilíbrio

$$\frac{d(RA)_t}{dt} = (CN)_t + \delta \cdot (RA)_t - P_t \tag{53}$$

podemos concluir que

$$\frac{d\left(\overline{RA}\right)_t}{dt} = \frac{d(RA)_t}{dt} - \frac{dF_t}{dt} = 0 \tag{54}$$

ou seja que $(\overline{RA})_t$ é constante ao longo do tempo e igual à responsabilidade por serviços passados existente aquando o inicio do plano.

Podemos então concluir que se supusermos (51) e se as hipóteses actuariais se realizarem a $\overline{RA}_t$ se mantém estacionária, já que não é feita nenhuma amortização desse valor mas apenas para o aumento resultante da força de capitalização.

A solução de (54) será

$$\left(\overline{RA}\right)_t = \left(\overline{RA}\right)_{t_0}$$

Se para $t \geq t_0$ $\overline{RA}_t = 0$ então $F_t = (RA)_t$ e $C_t = (CN)_t$.

Se a $\overline{RA}_t$ for amortizada em m anos obtemos para o Contribuição Anual

$$C_t = (CN)_t + \frac{\left(\overline{RA}\right)_t}{\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|}} \tag{55}$$

com $\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|}$ uma renda certa de m termos calculada com a força de capitalização δ

A equação (50) transforma-se agora em

$$\frac{dF_t}{dt} = (CN)_t + \frac{\left(\overline{RA}\right)_t}{\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|}} + \delta \cdot F_t - P_t \tag{56}$$

Assim, obtemos a expressão

$$\frac{d\left(\overline{RA}\right)_t}{dt} = \delta\left(\overline{RA}\right)_t - \frac{\left(\overline{RA}\right)_t}{\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|}} = \left(\delta - \frac{1}{\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|}}\right)\left(\overline{RA}\right)_t \tag{57}$$

que se anula se $\bar{a}^{\delta}_{\overline{m}|} = \frac{1}{\delta}$ o que acontecerá se $m \to \infty$.

2. MÉTODOS DE CUSTO AGREGADO

A característica principal destes métodos é que o cálculo é feito para toda a população através dum valor médio actuarial e a contribuição está directamente relacionada com o Valor Actual dos Custos Normais Futuros.

Seja $\bar{a}(t)$ a função definida através da expressão

$$\bar{a}(t) = \frac{(CNF)_t}{(CN)_t} \tag{58}$$

Vamos designar $\bar{a}(t)$ por anuidade temporária média porque no caso particular de $M(x)=\dfrac{\bar{N}_a-\bar{N}_x}{\bar{N}_a-\bar{N}_r}$ obtemos[3]

$$\bar{a}(t)=\frac{\int_a^r l_{x,t}\cdot\bar{a}_{x:\overline{r-x|}}dx}{\int_a^r l_{x,t}dx} \tag{59}$$

A contribuição é dada através da relação

$$C_t\cdot\bar{a}(t)=(BT)_t-F_t \Leftrightarrow C_t=\frac{(BT)_t-F_t}{(CNF)_t}(CN)_t \Leftrightarrow$$

$$C_t=\frac{(BT)_t-F_t}{(BT)_t-(RA)_t}(CN)_t \tag{60}$$

A equação (50) agora toma a forma de

$$\frac{dF_t}{dt}=\frac{(BT)_t-F_t}{(BT)_t-(RA)_t}(CN)_t+\delta F_t-P_t \tag{61}$$

o que significa que

$$\frac{d(\overline{RA})_t}{dt}=\frac{d(RA)_t}{dt}-\frac{dF_t}{dt}=\frac{F_t-(RA)_t}{(BT)_t-(RA)_t}(CN)_t+\delta(\overline{RA})_t= \tag{62}$$

$$=-\frac{(\overline{RA})_t}{(CNF)_t}(CN)_t+\delta(\overline{RA})_t=(\overline{RA})_t\left[\delta-\frac{1}{\bar{a}(t)}\right]$$

A equação anterior pode ser apresentada de outro modo,

$$\frac{d(\overline{RA})_t}{dt}\Big/(\overline{RA})_t=\left[\delta-\frac{1}{\bar{a}(t)}\right] \tag{63}$$

Se fizermos uma mudança de variável $u=t$ obtemos

$$\frac{d\ln(\overline{RA})_u}{dt}=\left[\delta-\frac{1}{\bar{a}(u)}\right] \tag{64}$$

Fazendo a integração e supondo que o plano foi implementado no ano 0 temos

[3] Ver demonstração no Anexo VII.

$$\left(\overline{RA}\right)_t = \left(\overline{RA}\right)_{t=0} \exp\left\{ \int_0^t \left[\delta - \frac{1}{\bar{a}(u)} \right] du \right\} \tag{65}$$

ou ainda

$$F_t = (RA)_t - \left[(RA)_{t=0} - F_{t=0} \right] \exp\left\{ \int_0^t \left[\delta - \frac{1}{\bar{a}(u)} \right] du \right\} \tag{66}$$

De (60) e (66) verificamos que se $(RA)_{t=0} = F_{t=0}$ então $F_t = (RA)_t$ para $t > 0$ e $C_t = (CN)_t$.

Se $F_{t=0} \neq (RA)_{t=0}$ (dum modo geral $F_{t=0} < (RA)_{t=0}$) só obtemos F_t convergente para $(RA)_t$ se

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \left[\delta - \frac{1}{\bar{a}(u)} \right] du = -\infty \tag{67}$$

Se $\delta - \frac{1}{\bar{a}(u)} < 0 \Leftrightarrow \bar{a}(u) < \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \bar{a}(u) < \bar{a}_{\infty}$ então verifica-se a igualdade (67).

Então, desde que o método seja escolhido de modo a que $\bar{a}(u) < \bar{a}_{\overline{r-a|}} < \bar{a}_{\infty}$, a convergência de F_t para $(RA)_t$ está garantida o que significa que $C_t \to (CN)_t$

CASO EXPONENCIAL

Nesta secção vamos supor um crescimento exponencial para a população e para as componentes produtividade e inflação do salário. Com esta hipótese as fórmulas anteriormente estudadas simplificam-se e permitem uma fácil derivação em termos de cálculos assim como uma fácil interpretação. As conclusões que irão ser retiradas deste caso particular permitem uma melhor compreensão do caso geral.

Para além das hipóteses anteriores vamos ainda considerar que

- os benefícios são indexados aos salários:

  $$B_{r,t} = b \cdot s_{r,t}$$

- as componentes inflação e produtividade do salário têm um crescimento exponencial

  $$s_t^g = e^{\gamma t}$$

- a população tem um crescimento exponencial com

  $$l_{x,t} = l_x \cdot e^{\alpha(t+r-x)}$$

Por vezes, as entidades que gerem Fundos de Pensões transferem, aquando a chegada dos vários indivíduos à data de reforma, a responsabilidade com as reformas para uma Seguradora. No nosso caso, em que estamos a supor apenas a reforma por velhice, isto traduz-se na compra de uma Renda Vitalícia Imediata quando um indivíduo atinge a Idade Normal de Reforma. Em Portugal a maioria das Seguradoras a gerir Fundos de Pensões optam por este sistema, enquanto as Sociedades Gestoras preferem retirar do valor do Fundo as pensões pagas em cada instante. Para diferenciar estes dois casos dizemos que a pensão é *paga por Seguro* ou é *paga pelo Fundo*.

É normal que o mínimo legalmente exigido para o valor de um Fundo de Pensões seja superior ao valor actual das pensões em pagamento, o que significa que no financiamento dum plano de pensões podemos preocuparmo-nos apenas com os activos uma vez que, embora as pensões possam ser pagas pelo fundo, o valor correspondente às pensões já em pagamento está por hipótese coberto.

As diversas funções até aqui estudadas correspondiam aos membros do plano: activos e reformados. Nesta secção só iremos estudar as funções afectas ao período activo supondo por uma questão de simplificação que as pensões são pagas por Seguro.

1. Efeitos do crescimento exponencial

O Custo Normal para o método Terminal Funding, como já foi referido anteriormente, é dado por

$$^{T}(CN)_t = P_t^r \cdot \bar{a}_r^h \tag{68}$$

Este valor representa o valor actual de todas as pensões que irão ser pagas de futuro aos indivíduos que se reformaram no instante t. Assim, este valor será aquele que irá ser utilizado para a compra das Rendas Vitalícias Imediatas (sem ter em conta os eventuais encargos).

Como a única saída do valor do Fundo é o prémio das rendas a adquirir nesse instante, a função P_t não tem sentido neste contexto e portanto iremos eliminá-la deste estudo.

Poderemos equacionar algumas das expressões apresentadas em função de ${}^{T}(CN)_{t+r-x}$:

$$(aBT)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} dx \tag{69}$$

$$(aRA)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \cdot M_{x,t} dx \tag{70}$$

$$(CN)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \cdot m_{x,t} dx \tag{71}$$

$$(CNF)_t = (aBT)_t - (aRA)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \left[1 - M_{x,t}\right] dx \tag{72}$$

Se resolvermos a equação (71) utilizando a integração por partes e tendo em conta que $M_{a,t} = 0$ e $M_{r,t} = 1$ e a equação (23) obtemos

$$(CN)_t = \left[e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \cdot M_{x,t} \right]_a^r -$$

$$-\delta \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \cdot M_{x,t} dx -$$

$$-\int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot M_{x,t} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[{}^{T}(CN)_{t+r-x} \right] =$$

$$= {}^{T}(CN)_t - \delta (aRA)_t + \frac{\partial}{\partial t} \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot {}^{T}(CN)_{t+r-x} \cdot M_{x,t} dx$$

o que é equivalente a

$$(CN)_t = {}^{T}(CN)_t - \delta (aRA)_t + \frac{d}{dt}(aRA)_t \tag{73}$$

ou ainda

$$(CN)_t + \delta(aRA)_t = {}^T(CN)_t + \frac{d(aRA)_t}{dt} \tag{74}$$

que representa a equação de equilíbrio considerando apenas os membros activos.

A interpretação desta equação mostra que o Custo Normal no instante t e o rendimento da Responsabilidade Actuarial afecta aos activos cobre o custo daqueles que se reformam nesse instante e a variação na Responsabilidade Actuarial dos activos.

Dado estarmos a supor um crescimento exponencial na população e no salário obtemos

$${}^T(CN)_t = \left(l_r \cdot e^{\alpha t}\right) \cdot \left(b \cdot s_r^m \cdot e^{\gamma t}\right) \cdot \bar{a}_r^h = (l_r \cdot b \cdot s_r^m) \cdot \bar{a}_r^h \cdot e^{(\alpha+\gamma)t} \tag{75}$$

Assim podemos concluir que

$${}^T(CN)_t = K \cdot e^{\theta t} \tag{76}$$

com K um valor constante em ordem a t e a x e $\theta = \alpha + \gamma$

Repare-se que de acordo com a expressão (76) qualquer variação em α ou em γ, desde que com o mesmo montante, terá o mesmo efeito sobre ${}^T(CN)_t$.

Se $K_x = K \cdot e^{\theta(r-x)}$ então, tendo em conta (76), podemos concluir que

$${}^T(CN)_{t+r-x} = e^{\theta(r-x)} \cdot {}^T(CN)_t = K_x \cdot e^{\theta t} \tag{77}$$

Assim, as equações de (69) a (72) são equivalentes a

$$(aBT)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} dx \tag{78}$$

$$(aRA)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} \cdot M_{x,t} dx \tag{79}$$

$$(CN)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot K(x) \cdot e^{\theta t} \cdot m_{x,t} dx \tag{80}$$

$$(CNF)_t = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} \cdot \left[1 - M_{x,t}\right] dx \tag{81}$$

2. Rácios

O cálculo de rácios pode ser útil na prática, já que estes permitem em termos comparativos ter uma ideia da grandeza de determinados valores. Neste estudo parece ser particularmente interessante considerar diferentes rácios resultantes da proporção de cada uma das funções BT, RA, CN, CNF em relação à Massa Salarial e ao Custo Normal do Terminal Funding:

2.1. Em relação à MS

A Massa Salarial apresenta a forma

$$(MS)_t = \int_a^r l_{x,t} \cdot s_{x,t} dx = \int_a^r (l_x \cdot e^{\alpha(t+r-x)}) \cdot (s_x^m \cdot e^{\gamma t}) dx =$$

$$= e^{\theta t} \int_a^r l_x \cdot e^{\alpha(r-x)} \cdot s_x^m dx \tag{82}$$

Repare-se que

$$(MS)_{t=0} = \int_a^r l_x \cdot e^{\alpha(r-x)} \cdot s_x^m dx \tag{83}$$

e portanto

$$(MS)_t = (MS)_{t=0} \cdot e^{\theta t} \tag{84}$$

Aqui uma variação em α ou em γ de igual montante, não tem o mesmo efeito sobre a Massa Salarial.

Repare-se que de modo análogo ao que foi feito em relação à Massa Salarial obtém-se

$$(aBT)_t = (aBT)_{t=0} \cdot e^{\theta t} \tag{85}$$

$$(aRA)_t = (aRA)_{t=0} \cdot e^{\theta t} \tag{86}$$

$$(CN)_t = (CN)_{t=0} \cdot e^{\theta t} \tag{87}$$

$$(CNF)_t = (CNF)_{t=0} \cdot e^{\theta t} \tag{88}$$

Se G_t for qualquer uma das funções anteriores então

$$\frac{G_t}{(MS)_t} = \frac{G_0}{(MS)_0} \tag{89}$$

2.2. Em relação ao ${}^{T}(CN)$

Para o cálculo destes rácios vamos introduzir o valor x_λ, com $\lambda = \delta - \theta$, que é calculado através da equação

$$e^{\lambda \cdot x_\lambda} = \int_a^r e^{\lambda x} m_{x,t} dx \qquad (90)$$

A existência do valor x_λ no intervalo $[a, r]$ é assegurada pelo teorema do valor médio para o Cálculo Diferencial[4].

Vamos chamar a este valor a **idade média do pagamento do Custo Normal** que está associada ao método em estudo através da função $m_{x,t}$. Dizemos que $r - x_\lambda$ é o número de anos financiados no passado enquanto que $x_\lambda - a$ é o número de anos financiado no futuro.

Vamos separar este estudo em três casos:

$$\boxed{\delta > \theta}$$

o) $\dfrac{(aBT)_t}{{}^{T}(CN)_t}$

Para este rácio teremos

$$\frac{(aBT)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \int_a^r \frac{e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t}}{K \cdot e^{\theta t}} dx = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \cdot e^{\theta(r-x)} dx =$$

$$= \int_a^r e^{-(\delta-\theta)(r-x)} dx$$

que resulta na equação

$$\frac{(aBT)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \int_a^r e^{-\lambda(r-x)} dx \qquad (91)$$

Como $\delta > \theta$ resulta $\lambda > 0$ e portanto pode-se escrever (91) como uma renda certa durante $r - a$ anos calculada com a taxa λ:

---

[4] Ver Anexo I.

$$\frac{(aBT)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-a}|} \tag{92}$$

○ $\dfrac{(CN)_t}{{}^{T}(CN)_t}$

$$\frac{(CN)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \int_a^r \frac{e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} \cdot m_{x,t}}{K \cdot e^{\theta t}} dx =$$

$$\int_a^r e^{-\lambda(r-x)} m_{x,t} dx = e^{-\lambda r} \int_a^r e^{\lambda x} m_{x,t} dx = e^{-\lambda r} e^{\lambda x_\lambda}$$

E portanto

$$\frac{(CN)_t}{{}^{T}(CN)_t} = e^{-\lambda(r-x_\lambda)} \tag{93}$$

De (93) e (77) concluímos que

$$(CN)_t = e^{-\lambda(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_t \Leftrightarrow \tag{94}$$

$$(CN)_t = e^{-\delta(r-x_\lambda)} . e^{\theta(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_t \Leftrightarrow$$

$$(CN)_t = e^{-\delta(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_{t+r-x_\lambda} \tag{95}$$

e que mostra que o Custo Normal no instante t permanece no fundo nos próximos $r - x_\lambda$ anos e servirá nessa altura para cobrir aquilo que será pago aos novos beneficiários.

Para o Terminal Funding $x_\lambda = r$, o que significa que o financiamento no passado é zero e que esse só será feito no futuro. Para o Initial Funding teremos

$${}^{I}(CN)_t = e^{-\delta(r-a)} . {}^{T}(CN)_{t+r-a} \tag{96}$$

o que significa que $x_\lambda = a$, ou seja será tudo financiado à entrada dos activos para o plano.

○ $\dfrac{(aRA)_t}{{}^{T}(CN)_t}$

$$\frac{(aRA)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \int_a^r \frac{e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} \cdot M_{x,t}}{K \cdot e^{\theta t}} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{(aRA)_t}{{}^{T}(CN)_t} = \int_a^r e^{-\lambda(r-x)} \cdot M_{x,t} dx \tag{97}$$

c) $\dfrac{(CNF)_t}{{}^T(CN)_t}$

$$\frac{(CNF)_t}{{}^T(CN)_t} = \int_a^r \frac{e^{-\delta(r-x)} \cdot K_x \cdot e^{\theta t} \cdot \left[1 - M_{x,t}\right]}{K \cdot e^{\theta t}} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{(CNF)_t}{{}^T(CN)_t} = \int_a^r e^{-\lambda(r-x)} \cdot \left[1 - M_{x,t}\right] dx \tag{98}$$

Poderemos simplificar estes dois últimos rácios tendo em conta que de (79) obtemos

$$\frac{d(aRA)_t}{dt} = \theta(aRA)_t \tag{99}$$

e utilizando a equação de equilíbrio referida em (74). Assim,

$$(aRA)_t = \frac{{}^T(CN)_t - (CN)_t}{\delta - \theta} = \frac{{}^T(CN)_t - e^{-\lambda(r-x_\lambda)}\,{}^T(CN)_t}{\lambda} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-\lambda(r-x_\lambda)}) \cdot {}^T(CN)_t}{\lambda} = \frac{(e^{\lambda(r-x_\lambda)} - 1) \cdot (CN)_t}{\lambda}$$

Concluímos então que[5]

$$(aRA)_t = {}^T(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|} \tag{100}$$

$$(aRA)_t = (CN)_t \cdot \bar{s}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|} \tag{101}$$

Repare-se que ${}^T(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|}$ expressa a Responsabilidade Actuarial como sendo o valor actual do Custo Normal do Terminal Funding pago durante os próximos $r - x_\lambda$ enquanto que $(CN)_t \cdot \bar{s}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|}$ representa o valor actual dos Custos Normais já acumulados nos passados $r - x_\lambda$ anos.

Por outro lado como

$$(aBT)_t = (aRA)_t + (CNF)_t \tag{102}$$

obtemos

---

[5] O valor actual de uma renda certa com n termos calculada à taxa β resulta da equação $\bar{a}^{\beta}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - e^{-\beta n}}{\beta}$ enquanto que para o valor acumulado se obtêm de $\bar{s}^{\beta}_{\overline{n}|} = \dfrac{e^{\beta n} - 1}{\beta}$

$$({CNF})_t = {}^{T}(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-a}|} - {}^{T}(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|} \Leftrightarrow$$

$$({CNF})_t = e^{-\lambda(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{x_\lambda - a}|} \qquad (103)$$

Tendo em conta (94) obtemos

$$({CNF})_t = (CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{x_\lambda - a}|} \qquad (104)$$

A fórmula (104) exibe o valor actual dos Custos Normais futuros como sendo o valor duma renda temporária durante $x_\lambda - a$ e cujos pagamentos são de $(CN)_t$.

A interpretação das equações anteriormente obtidas

(a) $(CN)_t = e^{-\lambda(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_t$

(b) $(CN)_t = e^{-\delta(r-x_\lambda)} . {}^{T}(CN)_{t+r-x_\lambda}$

(c) ${}^{I}(CN)_t = e^{-\delta(r-a)} . {}^{T}(CN)_{t+r-a}$

(d) $(aRA)_t = {}^{T}(CN)_t \cdot \bar{a}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|}$

(e) $(aRA)_t = (CN)_t \cdot \bar{s}^{\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|}$

(f) $(CNF)_t = (CN)_t \bar{a}^{\lambda}_{\overline{x_\lambda - a}|}$

poderá ser clarificada através do Diagrama de Lexis apresentado na Figura 7.

As linhas diagonais da figura representam as diversas gerações. As linhas verticais representam o financiamento num determinado instante. Durante as linhas diagonais o crescimento do salário e da população é fixo, apenas a força de capitalização muda o que significa que os valores actuais resultam diferentes ao longo dessas linhas. Os pagamentos são distribuídos ao longo das linhas horizontais e são de diferentes montantes devido a θ e tem valores actuais diferentes devido a δ. Os Custos Normais na mesma linha vertical diferem porque são feitos por grupos diferentes e os instantes em que eles irão receber a pensão são diferentes. O movimento vertical, ou seja, no mesmo instante, pressupõe uma actualização com λ = δ - θ.

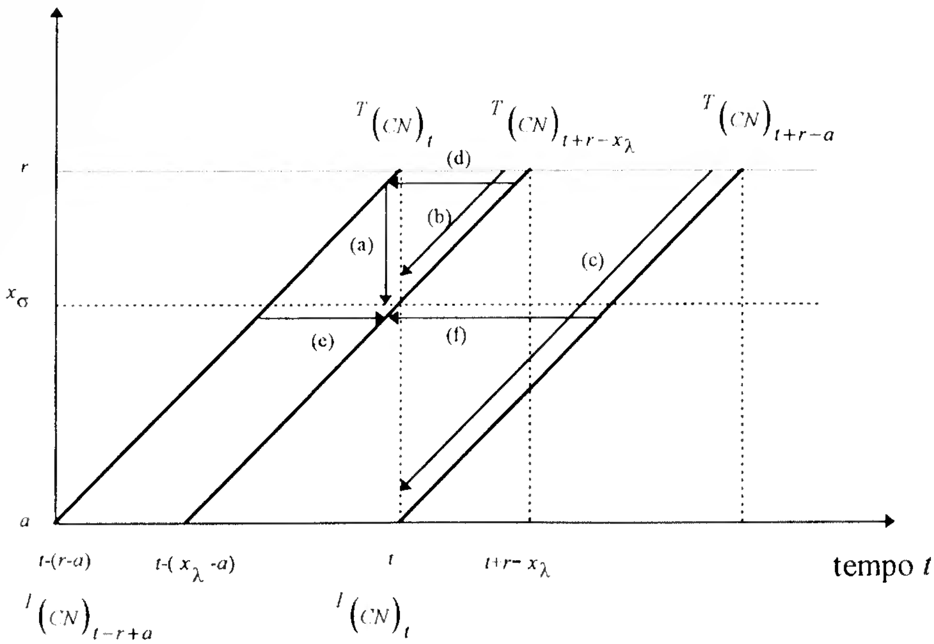


Figura 7 - Interpretação de algumas funções através de um Digrama de Lexis

$\boxed{\delta = \theta}$

Se $\delta = \theta$ então $\lambda = 0$. Repare-se que para $\lambda = 0$ a fórmula (90) não nos dá uma definição para x_λ já que é sempre verdadeira qualquer que seja x_λ. Mas

$$e^{\lambda x_\lambda} = \int_a^r e^{\lambda x} m_{x,t} dx \Leftrightarrow x_\lambda = \frac{1}{\lambda} \ln\left[\int_a^r e^{\lambda x} m_{x,t} dx\right] = \frac{C(\lambda)}{\lambda}$$

Vamos definir x_λ como sendo

$$x_\lambda = \lim_{\lambda \to 0} \frac{C(\lambda)}{\lambda} \tag{105}$$

Utilizando a Regra de L'Hospital[6] obtemos

$$x_\lambda = \int_a^r x m_{x,t} dx = \bar{x} \tag{106}$$

e

$$r - \bar{x} = \int_a^r M_{x,t} dx \tag{107}$$

[6] Ver Anexo I.

Neste caso particular as equações (77), (92) e (93), são substituídas por

$$^{T}(CN)_{t+r-x} = e^{\delta(r-x)}.^{T}(CN)_{t} \qquad (108)$$

$$\frac{(aBT)_t}{^{T}(CN)_t} = r - a \Leftrightarrow (aBT)_t = (r-a)\cdot^{T}(CN)_t \qquad (109)$$

$$\frac{(CN)_t}{^{T}(CN)_t} = 1 \Leftrightarrow (CN)_t = ^{T}(CN)_t$$

Então as fórmulas (97) e (98) transformam-se em

$$\frac{(aRA)_t}{^{T}(CN)_t} = r - \bar{x} \qquad (110)$$

$$\frac{(CNF)_t}{^{T}(CN)_t} = (r-a) - (r-\bar{x}) = \bar{x} - a \qquad (111)$$

$\boxed{\delta < \theta}$

Aqui a soma da taxa de crescimento salarial (para as componentes inflação e produtividade) com a taxa de crescimento da população é superior à força de capitalização. O número x_λ continua a ser definido, para cada método, pela fórmula (90). No entanto as fórmulas anteriormente apresentadas têm um novo significado porque $\lambda = \delta - \theta < 0 \Rightarrow e^{-\lambda} > 1$. Assim, nas fórmulas anteriores teremos que substituir $\bar{a}^{\lambda}_{\overline{n}|}$, calculado com uma força de $\delta - \theta > 0$, por $\bar{s}^{-\lambda}_{\overline{n}|}$ calculado a uma força de $-\lambda = \theta - \delta > 0$. Enquanto que se observa no primeiro caso um efeito desconto aqui verifica-se um efeito de acumulação.

Assim, as fórmulas correspondentes a (92), (93), (100), (101) e (104) são

$$\frac{(aBT)_t}{^{T}(CN)_t} = \bar{s}^{-\lambda}_{\overline{r-a}|} \qquad (112)$$

$$\frac{(CN)_t}{^{T}(CN)_t} = e^{-\lambda(r-x_\lambda)} \qquad (113)$$

$$(aRA)_t = ^{T}(CN)_t \cdot \bar{s}^{-\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|} \qquad (114)$$

$$(aRA)_t = (CN)_t \cdot \bar{a}^{-\lambda}_{\overline{r-x_\lambda}|} \qquad (115)$$

$$(CNF)_t = (CN)_t \, s^{-\lambda}_{\overline{x_\lambda - a}|} \qquad (116)$$

O Diagrama de Lexis para esta situação é semelhante ao anterior, fazendo apenas as alterações necessárias que resultam de $-\lambda > 0$.

CAPÍTULO III

Ganhos e Perdas Actuariais

CONSIDERAÇÕES

1. GANHOS E PERDAS ACTUARIAIS

Embora em qualquer avaliação actuarial exista a preocupação das melhores estimativas para as hipóteses actuariais e financeiras estas raramente se verificam surgindo assim desvios entre os valores esperados e os observados que provocando ganhos ou perdas.

Uma "perda" ocorre quando a diferença entre os valores supostos e os valores observados é positiva e, de modo análogo, um "ganho" surge quando essa diferença é negativa.

É natural obtermos ganhos actuariais quando as hipóteses actuariais são demasiado pessimistas. Por outro lado se as hipóteses são muito optimistas provavelmente irão ocorrer perdas. No entanto se essas hipóteses consideradas forem "realistas" poderemos esperar Ganhos e Perdas nulos ou que estes se anulem com o tempo? A ideia essencial a não esquecer é que o "realista" se encontra entre o "pessimista" e "optimista" e que na estatística as perdas são completamente imprevisíveis. Assim, o ajustamento dos "déficit" e dos "superavit" dará um maior controle sobre o futuro.

Neste capitulo pretendemos estudar de um modo sucinto, e com base em Dusfrene, Haberman e Trowbridge, as causas e algumas técnicas de ajustamento dos Ganhos e Perdas. Com esse objectivo supusemos que todas as hipóteses eram consistentes com a experiência à excepção da taxa de rendimento. A escolha da taxa de rendimento do fundo para análise dos Ganhos e Perdas deveu-se ao facto de ser difícil fazer uma estimativa a longo prazo para esta variável. É que a taxa de rendimento obtida através das aplicações financeiras dos fundos depende, por exemplo, do contexto económico, da Entidade Gestora e de restrições legais, como podemos verificar no número seguinte.

2. APLICAÇÕES FINANCEIRAS DOS FUNDOS DE PENSÕES

Para além de outras funções, as Entidades Gestoras de Fundos de Pensões fazem a gestão do volume de activos, afecto a cada Fundo gerido, através de aplicações financeiras.

Dado o produto em questão é necessário que haja segurança, rendimento e liquidez pelo que deve ser assegurada uma diversificação e dispersão adequada das aplicações financeiras, limitando a níveis prudentes as aplicações em activos que pela sua natureza ou qualidade do emitente apresentem um elevado grau de risco. A título de exemplo vejamos alguns dos limites actualmente em vigor:

Quadro 1

Alguns limites às aplicações dos Fundos de Pensões

Natureza dos Activos	Limites Mínimos	Limites Máximos
Depósitos a prazo e certificados de depósito	-	20%
Obrigações e papel comercial, excepto títulos de divida pública	-	60%
Unidades de participação em fundos de investimento	-	20%
Acções e títulos de participação cotados em bolsa de valores dos Estados membros da OCDE	-	25%
Terrenos e Edifícios	-	45%
Empréstimos hipotecários e empréstimos concedidos aos participantes dos fundos de pensões fechados	-	25%
Caixa e disponibilidades à vista	-	3%
Títulos de Divida publica emitidos por prazo superior a 1 ano, no caso dos Fundos de Pensões PPR	50%	-
(...)		

As taxas de rentabilidade obtidas para um determinado fundo através destas aplicações financeiras variam ao longo do tempo não só pela possível variação dos limites referidos, como por exemplo pela alteração de políticas de gestão da Entidade Gestora ou da própria Associada, a instabilidade no mercado de capitais, a introdução de novos produtos no mercado, a alteração da taxa de inflação, a mudança de Entidade Gestora, ...

Na figura 1 verificamos que a evolução das taxas de rentabilidade pode variar com a Entidade Gestora, uma vez que a estrutura das carteiras e o volume de activos geridos por cada uma destas entidades é normalmente diferente. Além disso essas entidades podem ser mais ou menos aversas ao risco.

Quando se compara taxas de rentabilidade teremos que ter em conta a inflação do período em estudo para podermos saber qual a rentabilidade real. Por exemplo na Figura 1 a Entidade Gestora A em 1992 obteve, com uma taxa de rentabilidade de 17.7% e a inflação a 9%, uma rentabilidade real de $8\% = \frac{1.177}{1.09} - 1$ e em 1993 uma rentabilidade de 13.9% embora a real fosse de 7%.

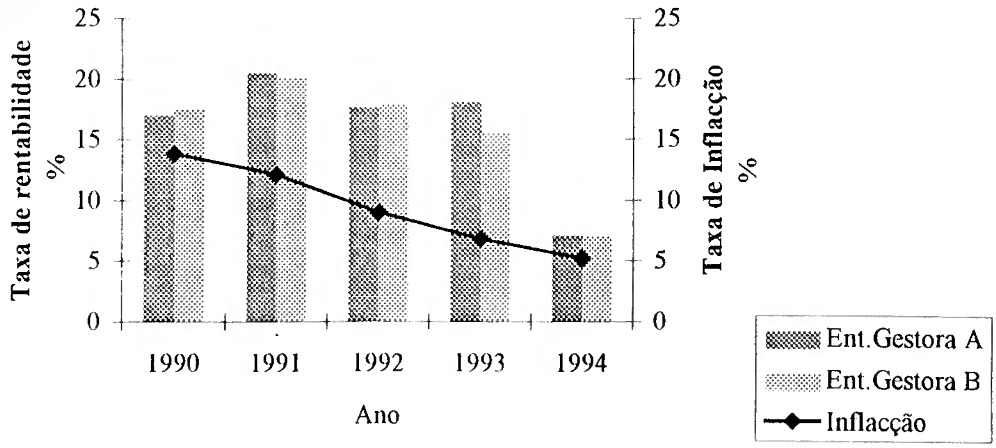


Figura 1 - Comparação entre a taxa de rentabilidade média obtida para os Fundos de Pensões geridos por duas Entidades Gestoras distintas

Mas para além das diferenças existentes entre Entidades Gestoras, as rentabilidades obtidas, para os diversos fundos geridos pela mesma entidade, podem ser muito diferentes entre si como podemos verificar na Figura 2.

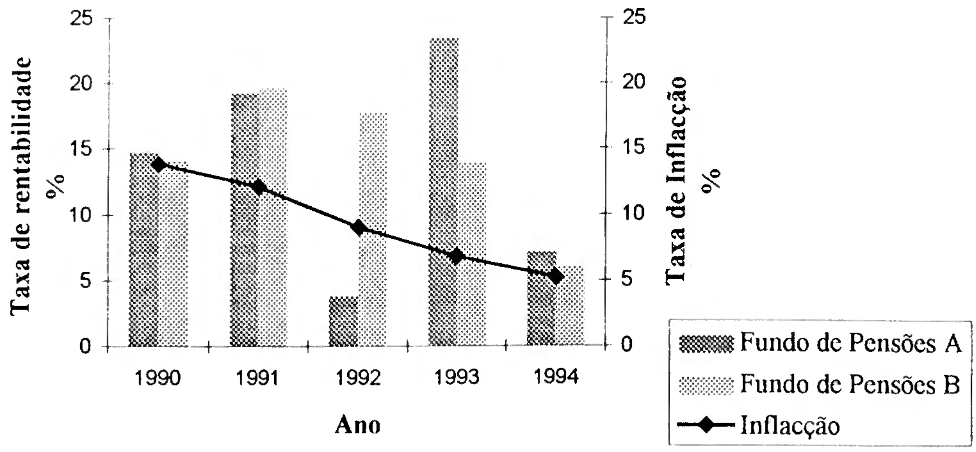


Figura 2 - Comparação entre a taxa de rentabilidade média obtida para dois Fundos de Pensões geridos pela mesma Entidade Gestora

A existência de Carteiras Objectivo diferentes para os fundos geridos, o volume de activos, o pagamento de pensões, as contribuições em determinados títulos que podem originar menos-valias e a interferência das Associadas na política de investimentos da Entidade Gestora podem ser algumas das razões das diferenças encontradas na figura anterior.

Vamos agora comparar dois países com taxas de rentabilidade muito diferentes no período $[1983,1993]$, tendo em conta a taxa de inflação e o volume de activos gerido:

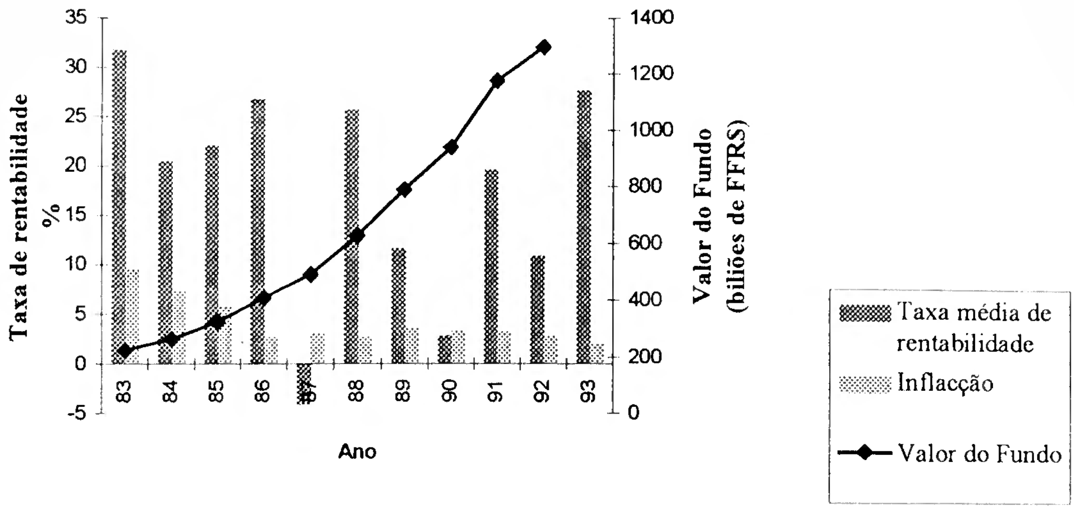


Figura 3 - A taxa de rentabilidade média dos Fundos de Pensões na França[1]

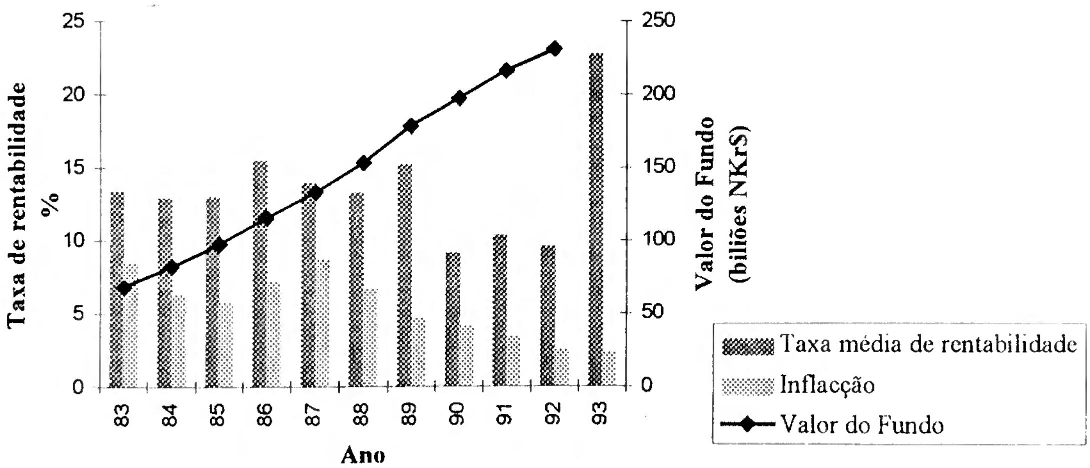


Figura 4 - A taxa de rentabilidade média dos Fundos de Pensões na Noruega[1]

3. TAXA DE RENTABILIDADE VS TAXA DE RENDIMENTO

Iremos utilizar a designação "taxa de rentabilidade" para definir a rentabilidade verificada num determinado período, e "taxa de rendimento" para definir a taxa pressuposta nos cálculos.

Através do que foi exposto no número anterior, podemos constatar que a taxa de rentabilidade pode ter grandes alterações ao longo do tempo, o que significa que provavelmente a taxa de rendimento a longo prazo pressuposta nos cálculos actuariais não será igual à verificada provocando algumas distorções nos valores alcançados.

[1] Fonte - "Global Fund Indicators. A long term Analysis of Pension Funds around the world". Setembro 94. UBS Asset Management.

Neste capítulo vamos supor que as taxas de rentabilidade observadas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, embora a taxa de rendimento pressuposta na avaliação actuarial seja constante. Assim, iremos estudar quais as consequências destes desvios no financiamento de um plano de pensões.

Ao contrário do capítulo anterior não iremos utilizar a força de capitalização.

4. HIPÓTESES

As hipóteses consideradas são as seguintes:

- a população é estacionária
- todas as hipóteses actuariais são consistentes com a experiência à excepção da taxa de rendimento
- não há inflação nos salários
- todas as hipóteses actuariais são constantes
- as contribuições e as pensões são pagas no inicio do período
- A taxa de rentabilidade i_t diz respeito ao período $[t-1,t]$. As taxas $\{i_t\}_{t\geq 1}$ são i.i.d. com $\Pr(i_t > -1) = 1$ e $\operatorname{var}(i_t) = \sigma^2 < \infty$.
- $prob(F_0 = F) = 1$ para algum $F \in \Re$
- $H_t = \{\sigma -$ álgebra dos acontecimentos F_t, C_t e $(GP)_t$ anteriores a t (inclusive)$\}$
- A transformada - z[2] de uma qualquer sequência $\{x_t\}$ será representada por $\tilde{x}_t$

5. CASO DISCRETO

A apresentação dos capítulos I e II foi feita no caso contínuo permitindo obter facilmente a derivação de algumas das fórmulas, assim como a sua simplificação. Neste capítulo optamos pelo caso discreto já que assim poderemos utilizar os *Processos Estocásticos* que têm uma aplicação mais fácil do que as *Equações Diferenciais Estocásticas*. Embora esta dissertação seja essencialmente teórica, este capítulo pretende estar mais próximo de uma aplicação prática que é sempre mais simples no caso discreto.

Como estamos perante uma população estacionária, a equação de equilíbrio apresenta a seguinte forma no caso discreto

$$RA = (1+i)(RA + CN - P) \qquad (1)$$

equivalente a

$$dRA = P - CN \qquad (2)$$

com $d = \dfrac{i}{1+i}$.

[2] As transformadas - z correspondem, no caso discreto, às transformadas de Laplace. Ver Anexo VI.

O Valor do Fundo no instante $t+1$ obtêm-se da equação

$$F_{t+1} = (1+i_{t+1})(F_t + C_t - P) \tag{3}$$

Iremos utilizar neste capítulo algumas relações conhecidas;

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) \tag{4}$$

$$E(X) = E\left[E(X|H)\right] \tag{5}$$

$$Var(X) = E\left[Var(X|H)\right] + Var\left[E(X|H)\right] \tag{6}$$

e considerar que

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{7}$$

$$\forall t \in Z,\ E\left[i_t\right] = i_e \tag{8}$$

$$d_e = \frac{i_e}{1+i_e} \tag{9}$$

$$u_t = 1 + i_t \tag{10}$$

$$\forall t \in Z,\ E\left[u_t\right] = 1 + i_e = u_e \tag{11}$$

$$\forall t \in Z,\ Var(i_t) = Var(u_t) = \sigma^2 \tag{12}$$

$$i^* = E\left[i_t\right] - i = i_e - i \tag{13}$$

TÉCNICAS DE AJUSTAMENTO

1. RESPONSABILIDADE ACTUARIAL NÃO FINANCIADA VS GANHOS E PERDAS ACTUARIAIS

Tal como já vimos no capitulo I os conceitos *Responsabilidade Actuarial não financiada* e *Ganhos e Perdas* são diferentes. A Responsabilidade Actuarial não financiada representa num instante preciso a diferença entre a "reserva matemática" criada por um determinado método e o Valor do Fundo existente. Os Ganhos e Perdas representam os desvios verificados no valor da Responsabilidade Actuarial não financiada dizendo respeito a um determinado período, normalmente um ano.

Os factores que poderão influenciar a evolução da Responsabilidade Actuarial não financiada serão, de um modo geral:

- a Responsabilidade Inicial aquando da constituição do plano
- a modificação na fórmula de benefícios
- a alteração do Método de Financiamento ou das hipóteses actuariais e financeiras
- actualização das pensões sem ter em conta este factor nos cálculos
- os Ganhos e Perdas Actuariais

O aparecimento dos Ganhos e Perdas Actuariais ocorre quando:

- o total das contribuições realizadas durante o ano t e capitalizadas para o final do ano é diferente do Custo Normal determinado por um determinado método de financiamento
- os benefícios são impossíveis de calcular com exactidão porque dependem por exemplo da pensão a atribuir pela Segurança Social
- as tábuas de Turnover utilizadas não correspondem exactamente às saídas dos activos verificadas
- as Tábuas de Mortalidade utilizadas não correspondem exactamente à mortalidade real dos activos e reformados
- flutuação na taxa de rentabilidade do Fundo devido a vários factores
- aumento salarial real diferente da taxa de crescimento salarial suposta
- Reformas Antecipadas, Pré-reformas e Reformas Adiadas

2. TÉCNICAS DE AJUSTAMENTO DOS GANHOS E PERDAS.

Os actuários desenvolveram métodos para ajustar as contribuições devido aos ganhos e perdas verificados ao longo do tempo e de modo a não colocar em causa a solvência do Fundo de Pensões.

A Responsabilidade Actuarial não financiada aquando a constituição do Fundo de Pensões coincide com a Responsabilidade Suplementar. Vamos supor que a evolução da $\overline{(RA)}_t$ resulta apenas dos Ganhos e Perdas que irão ocorrer, o que significa que a diferença

$$\overline{(RA)}_t - (RS)_t \tag{14}$$

corresponde ao total dos Ganhos e Perdas ocorridos desde a constituição do fundo e ainda não amortizados.

As técnicas mais conhecidas para o ajustamento do Custo Normal, de modo a que este inclua os Ganhos e Perdas, são a **Amortização Imediata,** o método **Spread** e o método **Amortization of Losses**. Assim, a Responsabilidade Suplementar em cada instante resulta da Responsabilidade Inicial ainda não amortizada e dos Ganhos e Perdas ocorridos e da amortização destes.

2.1. Amortização Imediata

Esta técnica consiste na amortização imediata de um ganho (ou perda), assim que este se torna evidente, através da subtracção ou adição desse valor à próxima contribuição.

Se considerarmos ${}^{gp}(CA)_t$ a soma do Custo Normal com a amortização dos Ganhos e Perdas teremos para este caso

$${}^{gp}(CA)_t = (CN)_t + (GP)_{t-1} \tag{15}$$

Repare-se que o Método Pay-as-you-go faz este ajustamento automaticamente. Teoricamente a Amortização Imediata poderá ser aplicada a todos os métodos, não sendo no entanto usual aplicá-la aos métodos *Aggregate* e ao *Attained Age*, pois estes métodos já têm implícito uma amortização.

2.2. Método "Spread"

Consiste numa amortização suave da Responsabilidade Actuarial não financiada ao longo de um número de anos. A Amortização Imediata é um caso particular deste método com $m = 1$.

No caso dos Métodos de Custo Individual é usual obter para o Custo Anual, incluindo esse ajustamento, a seguinte expressão

$${}^{gp}(CA)_t = (CN)_t + \frac{\overline{(RA)}_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{16}$$

com $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ calculada com a taxa de rendimento do Fundo.

Para os Métodos de Custo Agregado é feito uma amortização directamente relacionada com o Valor Actual dos Benefícios Totais e o Valor do Fundo,

$${}^{gp}(CA)_t = \left[(BT)_t - F_t\right]\frac{(CN)_t}{(CNF)_t} \tag{17}$$

sendo neste caso o défice amortizado no restante período activo dos membros do plano através duma anuidade.

Este método de ajustamento é normalmente utilizado para os métodos *Aggregate*, *Attained Age* e o *Entry Age*, não sendo no entanto usual utilizar com o *Unit Credit*.

2.3. Método "Amortization of Losses"

Quando uma perda é registada (correspondendo ao período entre as duas últimas avaliações) faz-se a liquidação na íntegra dos Ganhos e Perdas através de uma série de pagamentos num número fixo de anos. Em cada avaliação o ajustamento do Custo Normal é a soma destes pagamentos que ainda estão em vigor.

Se considerarmos que o número fixo de anos é m teremos

$$^{gp}(CA)_t = (CN)_t + (AM)_t = (CN)_t + \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(GP)_{t-s}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{18}$$

com $(AM)_t$ a amortização feita no instante t.

Cada $(GP)_t$ é liquidado nos anos t, $t+1$, ..., $t+m-1$. O facto de a anuidade $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ ser calculada com a taxa de rendimento do fundo garante, se as hipóteses actuariais se verificarem, que o valor $(GP)_t$ é amortizado na totalidade.

Vamos formular uma expressão para $\overline{(RA)}_t$ em função apenas de $(GP)_s$. Suponhamos que o plano foi implementado no instante $t = 0$ e portanto $(GP)_s = 0,\ \forall s < 0$ e $(GP)_0 = \overline{(RA)}_0$.

$$\overline{(RA)}_1 = (1+i)\left[\overline{(RA)}_0 - (AM)_0\right] + (GP)_1 = (1+i)\left[\overline{(RA)}_0 - \frac{\overline{(RA)}_0}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] + (GP)_1 =$$

$$= (1+i)\left[1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right](GP)_0 + (GP)_1 = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(GP)_0 + (GP)_1$$

$$\overline{(RA)}_2 = (1+i)\left[\overline{(RA)}_1 - (AM)_1\right] + (GP)_2 =$$

$$(1+i)\left[\frac{\ddot{a}_{\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(GP)_0 + (GP)_1 - \frac{(GP)_0}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - \frac{(GP)_1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] + (GP)_2 =$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{m-2}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(GP)_0 + \frac{\ddot{a}_{\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(GP)_1 + (GP)_2$$

(...)

$$\overline{(RA)}_t = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(GP)_{t-k} \tag{19}$$

A equação anterior representa o valor actual dos ajustamentos $\frac{(GP)_s}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$ que ainda não foram pagos e que dizem respeito às perdas que ocorreram nos passados m anos (incluindo o ano em questão).

Repare-se que a Amortização Imediata é um caso particular deste com $m = 1$.

MÉTODO SPREAD

1. MÉTODO SPREAD

1.1. Método de Custo Individual

Como já vimos na secção anterior o método "Spread" amortiza a *Responsabilidade Actuarial não financiada* através de uma renda certa de m termos:

$$^{gp}(CA)_t = CN + \frac{\overline{(RA)}_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \quad \text{com } 2 \leq m < \infty \tag{20}$$

Supondo que $C_t = {}^{gp}(CA)_t$, a equação (3) toma agora a seguinte forma

$$F_{t+1} = u_{t+1}\left[F_t + CN + \frac{(RA - F_t)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P\right] = \frac{u_{t+1}}{u_e}(qF_t + r) \tag{21}$$

com
$$q = u_e\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right) \tag{22}$$

$$r = u_e\left(CN + \frac{RA}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P\right) \tag{23}$$

Através das equações (20) e (21) podemos concluir que C_t e F_t são processos de Markov, já que estas variáveis só dependem do instante imediatamente anterior.

1.1.1. Momento centrado de 1ª ordem

Podemos formular o valor esperado do Valor do Fundo no instante $t+1$ em função do instante anterior:

$$E[F_{t+1}] = E\left[E[F_{t+1}|H_t]\right] = E[qF_t + r] = qE[F_t] + r \tag{24}$$

Proposição 1:

Se $m = 1$ então

$$\forall t \in Z, \; E[F_t] = \frac{1+i_e}{1+i} RA \tag{25}$$

$$\forall t \in Z, \; E[C_t] = CN - \frac{i^*}{1+i} RA \tag{26}$$

Demonstração:

❑

Neste caso particular a contribuição resulta do Custo Normal, calculado através de determinado método, e da amortização total, em cada instante t, da Responsabilidade Actuarial não financiada,

$$C_t = CN + \left(\overline{RA}\right)_t \tag{27}$$

o que significa que

$$F_t = u_t\left(RA + CN - P\right) = u_t\left(RA - dRA\right) = \frac{1+i_t}{1+i}RA \tag{28}$$

Repare-se que se a taxa de rentabilidade no período $[t-1,\ t]$ for igual à taxa de rendimento pressuposta nos cálculos obtêm-se a equação de equilíbrio,

$$F_t = RA = (1+i)\left(RA + CN - P\right),$$

porque não existe Responsabilidade Actuarial não financiada por amortizar se todas as hipóteses actuariais e financeiras se verificarem.

De (27) e (28) concluímos que

$$E\left[F_t\right] = \frac{1+i_e}{1+i}RA$$

$$E\left[C_t\right] = CN + RA - \frac{1+i_e}{1+i}RA = CN - \frac{i^*}{1+i}RA$$

❑

Proposição 2:

Se $2 \leq m < \infty$ então

$$E\left[F_t\right] = q^t F_0 + r\frac{1-q^t}{1-q} \tag{29}$$

Demonstração:

❑

Vamos demonstrar esta proposição utilizando a Indução Matemática.

Se $t = 0$ então $E\left[F_0\right] = F_0$ porque supusemos na secção anterior que $prob(F_0 = F) = 1$ para algum $F \in \Re$.

Suponhamos que $E\left[F_t\right] = q^t F_0 + r\frac{1-q^t}{1-q}$. Então

$$E\left[F_{t+1}\right] = qE\left[F_t\right] + r = q\left(q^t F_0 + r\frac{1-q^t}{1-q}\right) + r = q^{t+1}F_0 + r\frac{q-q^{t+1}}{1-q} + r =$$

$$= q^{t+1}F_0 + r\left[\frac{q-q^{t+1}}{1-q} + \frac{1-q}{1-q}\right] = q^{t+1}F_0 + r\frac{1-q^{t+1}}{1-q}$$

o que significa que a equação (29) se verifica para qualquer que seja t.

❑

Proposição 3:

Se $E[i_t] = i$ e se $2 \le m < \infty$ podemos concluir que

i) $E[F_\infty] = \lim\limits_{t\to\infty} E[F_t] = RA$ (30)

ii) $E[C_\infty] = \lim\limits_{t\to\infty} E[C_t] = CN$ (31)

Demonstração:

❑

Se $E[i_t] = i$ então $i = i_e$ e portanto para $m \ge 2$

$$q = (1+i)(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}) = (1+i)\frac{\ddot{a}_{\overline{m}|} - 1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

o que significa que se verifica a desigualdade $0 < q < 1$

i) Obtemos, através da desigualdade anterior e da equação (29), o resultado

$$E[F_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[F_t] = \lim_{t\to\infty}\left[q^t F_0 + r\frac{1-q^t}{1-q}\right] = r\frac{1}{1-q} < \infty$$

$$\frac{r}{1-q} = \frac{(1+i)\left(CN + \frac{RA}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P\right)}{1-(1+i)\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right)} = \frac{(1+i)\left(-dRA + \frac{RA}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right)}{(1+i)\left(\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - d\right)} = RA$$

ii) De i) e da equação (20) resulta

$$\lim_{t\to\infty} E[C_t] = \lim_{t\to\infty}\left[CN + \frac{(RA - F_t)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] = CN$$

❑

Proposição 4:

Se $E[i_t] \neq i$, $0 < q < 1$ e se $2 \leq m < \infty$ podemos concluir que

$$\text{i)}\quad E[F_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[F_t] = r\frac{1}{1-q} \tag{32}$$

$$\text{ii)}\quad E[C_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[C_t] = \lim_{t\to\infty}\left[CN + \frac{\left(RA - \frac{r}{1-q}\right)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] \tag{33}$$

Demonstração:

❑

Nestas condições apenas podemos dizer que se

$$0 < q = (1+i_e)\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right) < 1$$

então

$$E[F_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[F_t] = r\frac{1}{1-q}$$

$$E[C_\infty] = \lim_{t\to\infty} E[C_t] = \lim_{t\to\infty}\left[CN + \frac{\left(RA - E[F_\infty]\right)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right]$$

❑

1.1.2. Momento de 2ª ordem

Proposição 5:

Se $m = 1$ então

$$VarF_t = VarC_t = \sigma^2\frac{RA^2}{(1+i)^2} \tag{34}$$

Demonstração:

❑

De (28) e (27) obtemos

$$Var(F_t) = Var\left(\frac{1+i_t}{1+i}RA\right) = \sigma^2\frac{RA^2}{(1+i)^2}$$

$$Var(C_t) = Var\left(CN + RA - \frac{1+i_t}{1+i} RA\right) = \sigma^2 \frac{RA^2}{(1+i)^2}$$

❑

Proposição 6:

Se $2 \leq m < \infty$ então

$$Var[F_t] = s\sum_{j=1}^{t} k^{t-j} E^2[F_j],\ t \geq 1 \tag{35}$$

com $s = \dfrac{\sigma^2}{u_e^2}$ e $k = \left(1 + \dfrac{\sigma^2}{u_e^2}\right) q^2$

Demonstração:

❑

Sabemos que $Var(F_{t+1}) = E[Var(F_{t+1}|H_t)] + Var[E(F_{t+1}|H_t)]$, com

$$Var(F_{t+1}|H_t) = Var\left[\frac{u_{t+1}}{u_e}(qF_t + r)\right] = \frac{\sigma^2}{u_e^2}(qF_t + r)^2$$

$$E[Var(F_{t+1}|H_t)] = \frac{\sigma^2}{u_e^2} E\left[(qF_t + r)^2\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{u_e^2} Var[qF_t + r] + \frac{\sigma^2}{u_e^2} E^2(qF_t + r) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{u_e^2} q^2 Var(F_t) + \frac{\sigma^2}{u_e^2} E^2(F_{t+1})$$

e

$$Var[E(F_{t+1}|H_t)] = Var(qF_t + r) = q^2 Var(F_t)$$

Assim,

$$Var(F_{t+1}) = \frac{\sigma^2}{u_e^2} q^2 Var(F_t) + \frac{\sigma^2}{u_e^2} E^2(F_{t+1}) + q^2 Var(F_t) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sigma^2}{u_e^2}\right) q^2 Var(F_t) + \frac{\sigma^2}{u_e^2} E^2(F_{t+1}) =$$

$$= kVar(F_t) + sE^2(F_{t+1}) \tag{36}$$

Se $Var(F_0) = 0$ teremos

$$Var[F_1] = sE^2(F_1)$$

$$Var[F_2] = ksE^2(F_1) + sE^2(F_2)$$

$$Var[F_3] = k^2 sE^2(F_1) + ksE^2(F_2) + sE^2(F_3)$$

...

$$Var(F_t) = s\sum_{j=1}^{t} k^{t-j} E^2(F_j),\ t \geq 1$$

❑

Proposição 7:

$$Var(C_t) = \frac{Var[F_t]}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \tag{37}$$

Demonstração:

❑

$$Var(C_t) = Var\left(CN + \frac{RA - F_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right) = Var\left(-\frac{F_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right) = \frac{Var(F_t)}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}}$$

❑

Proposição 8:

i) Seja $2 \leq m \leq \infty$ e $k < 1$ então

$$Var(F_\infty) = \lim_{t\to\infty} Var(F_t) = \frac{\sigma^2}{u_e^2}\frac{E[F_\infty]^2}{1-k} \tag{38}$$

$$Var(C_\infty) = \lim_{t\to\infty} Var(C_t) = \frac{Var[F_\infty]}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \tag{39}$$

ii) Se $k \geq 1$ então os dois valores $Var(F_\infty)$ e $Var(C_\infty)$ não tem limite finito, o que significa que os valores de F_t e C_t poderão ter dispersões elevadas.

Demonstração:

❑

Se $f(t)$ e $g(t)$ são duas funções não inferiores a zero então

$$\liminf_t (f+g)(t) \geq \liminf_t f(t) + \liminf_t g(t)$$

$$\limsup_t (f+g)(t) \leq \limsup_t f(t) + \limsup_t g(t)$$

i) Se $k < 1$ então $q < 1$, e portanto de (32) concluímos que $E^2[F_\infty] < \infty$.

Da equação (35), e tendo em conta que $k \geq 0$, resulta que

$$\sup_t Var(F_t) \leq s \sum_{j=1}^{t} k^{t-j} \sup_t E^2(F_t) = s \sup_t E^2[F_t] \frac{1-k^t}{1-k} \leq$$

$$\leq \frac{s}{1-k} \sup_t E^2[F_t]$$

Então

$$\limsup_t Var(F_t) \leq \frac{sE^2[F_\infty]}{1-k} < \infty$$

Podemos tomar os limites inferior de ambos os lados da equação (36) para obter

$$\liminf_t Var(F_{t+1}) \geq \liminf_t kVar(F_t) + \liminf_t sE^2(F_{t+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \liminf_t \ (1-k)Var(F_t) \geq \liminf_t sE^2(F_{t+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \liminf_t Var(F_t) \geq \frac{sE^2[F_\infty]}{1-k}$$

Concluímos que

$$\lim_t Var(F_t) = \frac{sE^2(F_\infty)}{1-k}$$

e portanto

$$\lim_t Var(C_t) = \lim_t Var\left(CN + \frac{RA}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - \frac{F_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \right) = \lim_t \frac{Var(F_t)}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} = \frac{Var(F_\infty)}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}}$$

ii) Sabemos $E(F_\infty)$ nunca toma o valor zero porque

$$r = u_e \left(CN + \frac{RA}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P \right) = u_e RA \left(\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - d \right) > 0$$

Então, tendo em conta (35) e $k \geq 1$, $\lim_t Var(F_t) = \infty$, o que significa que $\lim_t Var(C_t) = \infty$.

❑

Proposição 9:

Seja $h \geq 0$ então

i)

$$Cov(F_t, F_{t+h}) = q^h Var(F_t) \tag{40}$$

$$Cov(C_t, C_{t+h}) = q^h Var(C_t) \tag{41}$$

$$Cov(F_t, C_{t+h}) = -q^h \frac{Var(F_t)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{42}$$

ii) Se $k < 1$ então para $t \to \infty$

$$\rho(F_t, F_{t+h}) \to q^h \tag{43}$$

$$\rho(C_t, C_{t+h}) \to q^h \tag{44}$$

$$\rho(F_t, C_{t+h}) \to -q^h \tag{45}$$

com ρ o coeficiente de correlação.

Demonstração:

❑

Se considerarmos $F_t^* = F_t - E[F_t]$ obtemos

$$F_{t+1}^* = \frac{u_{t+1}}{u_e}(qF_t + r) - qE[F_t] - r$$

e portanto

$$E\left[F_{t+1}^* | H_t\right] = qF_t - qE[F_t] = qF_t^*$$

$$Var(F_t) = E\left[(F_t - E[F_t])^2\right] = E\left[\left(F_t^*\right)^2\right]$$

i) Se $j \geq 0$

Utilizando estes resultados podemos calcular a covariância entre F_t e F_{t+1}

$$Cov(F_t, F_{t+1}) = E[F_{t+1} \cdot F_t] - E[F_t]E[F_{t+1}] = E\left[F_t^* \cdot F_{t+1}^*\right] =$$

$$= E\left[E\left[F_t^* \cdot F_{t+1}^* | H_t\right]\right] = E\left[q\left(F_t^*\right)^2\right] = qVar(F_t)$$

$$E\left[F_{t+j+1}^* \middle| H_{t+j}\right] = qF_{t+j}^* \Rightarrow Cov\left(F_t, F_{t+j+1}\right) = E\left[F_t^* F_{t+j+1}^*\right] =$$

$$= E\left[E\left[F_t^* F_{t+j+1}^* | H_t\right]\right] = E\left[qF_t^* F_{t+j}^*\right] = qCov\left(F_{t+j}, F_t\right)$$

Então podemos concluir que $Cov\left(F_t, F_{t+h}\right) = q^h Var(F_t)$.

Por outro lado

$$Cov(C_t, C_{t+h}) = E\left[C_t^* \cdot C_{t+h}^*\right]$$

Mas

$$C_t^* = C_t - E\left[C_t\right] = CN + \frac{RA - F_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - CN - \frac{RA - E\left[F_t\right]}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = \frac{-F_t + E\left[F_t\right]}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = \frac{-F_t^*}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

e portanto

$$Cov(C_t, C_{t+h}) = E\left[\frac{F_t^*}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \cdot \frac{F_{t+h}^*}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}^2} q^h Var(F_t) = q^h Var(C_t)$$

Do mesmo modo

$$Cov\left(F_t, C_{t+h}\right) = E\left[F_t^* \cdot C_{t+h}^*\right] = E\left[F_t^* \cdot \left(\frac{-F_{t+h}^*}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right)\right] = \frac{-1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} q^h Var\left(F_t\right)$$

ii) Se $k < 1$ então $Var(F_\infty)$ e $Var(C_\infty)$ têm valor finito, como se viu na proposição 8. Então

$$\rho\left(F_t, F_{t+h}\right) = \frac{Cov\left(F_t, F_{t+h}\right)}{\left[Var\left(F_t\right) \cdot Var\left(F_{t+h}\right)\right]^{1/2}} = q^h \left[\frac{Var\left(F_t\right)}{Var\left(F_{t+h}\right)}\right]^{1/2} \xrightarrow[t \to \infty]{} q^h$$

$$\rho\left(C_t, C_{t+h}\right) = q^h \left[\frac{Var\left(C_t\right)}{Var\left(C_{t+h}\right)}\right]^{1/2} \xrightarrow[t \to \infty]{} q^h$$

$$\rho\left(F_t, C_{t+h}\right) = -q^h \left[\frac{Var\left(F_t\right)}{Var\left(F_{t+h}\right)}\right]^{1/2} \xrightarrow[t \to \infty]{} -q^h$$

❑

1.1.3. População não estacionária

Se a população não é estacionária a equação (21) transforma-se em

$$F_{t+1} = u_{t+1}\left(F_t + (CN)_t + \frac{(RA)_t - F_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P_t\right) = \frac{u_{t+1}}{u_e}(qF_t + r_t) \qquad (46)$$

com $r_t = u_e\left((CN)_t + \frac{(RA)_t}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - P_t\right)$ e q a constante definida anteriormente.

Neste caso teremos

Proposição 10:

i) $E[F_{t+1}] = qE[F_t] + r_t$ (47)

ii) $Var(F_{t+1}) = kVarF_t + sE^2[F_{t+1}]$ (48)

com k e s as constantes definidas anteriormente.

1.2. Métodos de Custo Agregado

Para os Métodos de Custo Agregado a contribuição é normalmente calculada através da equação

$$C_t = \frac{BT - F_t}{CNF} CN \tag{49}$$

ou da equação

$$C_t = \frac{(BT)_t - F_t}{(CNF)_t}(CN)_t \tag{50}$$

consoante estejamos na presença duma população estacionária ou não. Neste último caso teremos

$$F_{t+1} = u_{t+1}\left[F_t + \frac{(BT)_t - F_t}{(CNF)_t}(CN)_t - P_t\right] =$$

$$= \frac{u_{t+1}}{u_e}\left[u_e F_t\left(1 - \frac{(CN)_t}{(CNF)_t}\right) + u_e\left(\frac{(BT)_t}{(CNF)_t}(CN)_t - P_t\right)\right]$$

o que significa que

$$F_{t+1} = \frac{u_{t+1}}{u_e}[q_t F_t + r_t] \tag{51}$$

com $q_t = u_e\left(1 - \frac{(CN)_t}{(CNF)_t}\right)$ e $r_t = u_e\left(\frac{(BT)_t}{(CNF)_t}(CN)_t - P_t\right)$

Proposição 11:

i) $E[F_{t+1}] = q_t E[F_t] + r_t$ (52)

ii) $VarF_{t+1} = k_t VarF_t + sE^2[F_{t+1}]$ (53)

com $k_t = q_t^2\left(1 + \frac{\sigma^2}{u^2}\right)$.

MÉTODO "AMORTIZATION OF LOSSES"

Neste método, e de acordo com as equações (18) e (19), obtemos

$$C_t = CN + (AM)_t = CN + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(GP)_{t-k}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{54}$$

$$(\overline{RA})_t = \sum_{k=0}^{m-1} (GP)_{t-k} \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{55}$$

$$F_t = RA - \sum_{k=0}^{m-1} (GP)_{t-k} \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{56}$$

Quando a taxa de rentabilidade é superior à taxa de rendimento a Responsabilidade Actuarial não financiada aumenta, o que se traduz numa perda, e a Responsabilidade Actuarial aumenta, o que se traduz num ganho. Então os Ganhos e Perdas no instante t resultam da soma

$$(GP)_{t+1} = (i_{t+1} - i)\left[(\overline{RA})_t - (AM)_t\right] - (i_{t+1} - i)(RA + CN - P) =$$

$$= (i_{t+1} - i)\left[(\overline{RA})_t - (AM)_t - \frac{RA}{1+i}\right]$$

com

$$RA + CN - P = \frac{RA}{1+i}$$

Mas

$$(\overline{RA})_t - (AM)_t = \sum_{k=0}^{m-1} (GP)_{t-k} \left[\frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}\right] = \sum_{k=0}^{m-2} (GP)_{t-k} e(k) \tag{57}$$

com

$$e(k) = \frac{a_{\overline{m-1-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}, \quad 0 \le k \le m-2 \tag{58}$$

sendo $a_{\overline{m-1-k}|}$ uma renda certa postecipada.

Finalmente obtemos uma expressão recursiva para $(GP)_{t+1}$

$$(GP)_{t+1} = (i_{t+1} - i)\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right] \tag{59}$$

com $A = \dfrac{RA}{1+i}$

Em primeiro lugar vamos calcular os momentos da função $(GP)_t$ com base na equação (59) e só depois iremos calcular os momentos de F_t e C_t.

Supõe-se que $(GP)_{-1}$, $(GP)_{-2}$, ... são conhecidos. Repare-se que $(GP)_t$ depende de $(GP)_{t-1}$, $(GP)_{t-2}$, ... , e portanto nem F_t nem C_t são processos de Markov porque dependem dos vários instantes anteriores.

1. Momento centrado de primeira ordem

<u>Proposição 12:</u>

Seja $E[i_t] = i$ e $2 \leq m < \infty$ então para $t > 0$ obtêm-se

$$E\left[(GP)_{t+1}\right] = 0 \tag{60}$$

<u>Demonstração:</u>

❑

$$E\left[(GP)_{t+1}\right] = E\left[E\left[(GP)_{t+1} \middle| H_t\right]\right] = (i_e - i)E\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right] = 0$$

❑

<u>Proposição 13:</u>

Seja $E[i_t] = i$ e $2 \leq m < \infty$ então para $t > 0$ obtêm-se

$$\begin{cases} E[C_t] = CN + \displaystyle\sum_{k=t}^{m-2} \frac{(GP)_{t-k}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \\ E[F_t] = RA - \displaystyle\sum_{k=t}^{m-2} (GP)_{t-j} \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \end{cases} \quad \text{para } t \leq m-2 \tag{61}$$

$$\begin{cases} E[C_t] = CN \\ E[F_t] = RA \end{cases} \quad \text{para } t \quad m-2 \tag{62}$$

<u>Demonstração:</u>

❑

De acordo com as hipóteses consideradas, a única causa possível do aparecimento de ganhos ou perdas seria a variação na taxa de rentabilidade. Assim, e porque apenas o valor esperado dos Ganhos e Perdas anteriores a $t = 0$ será diferente de zero, na condição de $E[i_t] = i$, obtemos

$$E[C_t] = CN + \sum_{k=t}^{m-2} \frac{(GP)_{t-k}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \quad \text{se } t \leq m-2$$

e

$$E[C_t] = CN \quad \text{se } t > m-2$$

Então

$$E[F_t] = RA - \sum_{k=t}^{m-2} (GP)_{t-k} \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \quad \text{se } t \leq m-2$$

$$E[F_t] = RA \quad \text{se } t > m-2$$

❑

Da proposição anterior podemos concluir que as condições iniciais tem apenas efeito nos momentos de F_t e de C_t quando $t \leq m-2$.

Proposição 14:

Seja $E[i_t] \neq i$ e $2 \leq m < \infty$ então para $t > 0$ obtêm-se

$$E\left[(GP)_{t+1}\right] = i^* \left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k) E\left[(GP)_{t-k}\right] - A\right] \tag{63}$$

Demonstração:

❑

$$E\left[(GP)_{t+1}\right] = E\left[E\left[(GP)_{t+1} \middle| H_t\right]\right] = E[i_{t+1} - i] E\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right] =$$

$$= i^* \left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k) E\left[(GP)_{t-k}\right] - A\right]$$

❑

Proposição 15:

Seja $E[i_t] \neq i$ e $2 \leq m < \infty$ então para $t > 0$ obtêm-se

$$E\left[(GP)_t\right] =$$

$$= -i^* \cdot A \left[1 + i^* \sum_{k=0}^{t-2} e(k) + (i^*)^2 \sum_{k=0}^{t-3} e^{(2)}(k) + \ldots + (i^*)^{t-1} \sum_{k=0}^{0} e^{(t-1)}(k)\right] \tag{64}$$

sendo $e^{(n)}$ a n-ésima convolução de $e(.)$,

$$e^{(n+1)}(t)=\sum_{j\geq 0} e(j)e^{(n)}(t-j) \text{ com } e^{(1)}(t)=e(t)$$

Demonstração:

❑

Seja $M_t = E\left[(GP)_t\right]$. Então

$$\widetilde{M}(z)=\sum_{t\geq 0} z^{-t}M_t$$

Pela propriedade 1 das Transformadas-z[3] obtemos

$$Z(M_{t+1})=z\cdot Z(M_t)-z\cdot M_0 \tag{65}$$

Tendo em conta o resultado da proposição anterior teremos

$$Z(M_{t+1})=\sum_{t\geq 0} z^{-t}M_{t+1}=i^*\sum_{t\geq 0} z^{-t}\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)E(M_{t-k})-A\right]=$$

$$=i^*\sum_{t\geq 0} z^{-t}\sum_{k=0}^{m-2} e(k)M_{t-k}-i^*\cdot A\sum_{t\geq 0} z^{-t}$$

Mas

$$\sum_{t\geq 0} z^{-t}\sum_{k=0}^{m-2} e(k)M_{t-k}=\sum_{k=0}^{m-2} e(k)z^{-k}\sum_{t\geq 0} z^{-t+k}M_{t-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-2} e(k)z^{-k}\left[\sum_{t=0}^{k-1} z^{-t+k}M_{t-k}+\sum_{t\geq k} z^{-t+k}M_{t-k}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-2} e(k)z^{-k}\left[\sum_{s=-k}^{-1} z^{-s}M_s+\sum_{s\geq 0} z^{-s}M_s\right]=$$

$$\sum_{k=0}^{m-2} e(k)z^{-k}\sum_{s=-k}^{-1} z^{-s}M_s+\sum_{k=0}^{m-2} e(k)z^{-k}\sum_{s\geq 0} z^{-s}M_s=$$

$$\widetilde{Q}(z)+\widetilde{e}(z)\widetilde{M}(z)$$

[3] Ver Anexo VI - Transformadas - z

em que $\widetilde{Q}(z)$ reflecte as condições iniciais com $Q(k) = e(k)\sum_{s=-k}^{-1} z^{-s}(GP)_s$.

Note-se que $0 \le k \le m-2$ como vimos em (58).

Se $z < 1$ então $\sum_{t\ge 0} z^{-t} = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}$ e obtemos

$$Z(M_{t+1}) = i^* \cdot \widetilde{e}(z)\widetilde{M}(z) + i^* \cdot \widetilde{Q}(z) - i^* \cdot A\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1} \tag{66}$$

Tendo em atenção (65) e (66) obtemos

$$z\widetilde{M}(z) - z(GP)_0 = i^* \cdot \widetilde{e}(z)\widetilde{M}(z) + i^* \cdot \widetilde{Q}(z) - i^* \cdot A\left(1-z^{-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{M}(z) = \frac{\left[(GP)_0 + i^* \cdot z^{-1}\widetilde{Q}(z)\right]}{1-i^* \cdot z^{-1}\widetilde{e}(z)} - \frac{i^* \cdot A \cdot z^{-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}}{1-i^* \cdot z^{-1}\widetilde{e}(z)} \tag{67}$$

Supondo que as condições iniciais são nulas, $(GP)_s = 0$ para $-m+2 \le s \le 0$ e tendo em conta o desenvolvimento em série da equação $\left(1-i^* \cdot z^{-1}\widetilde{e}(z)\right)^{-1}$, obtemos para $\widetilde{M}(z)$ a seguinte expressão:

$$\widetilde{M}(z) = -i^* \cdot A \cdot z^{-1}(1-z^{-1})^{-1}\left[1_{\{t\ge 0\}} + i^* \cdot z^{-1} \cdot \widetilde{e}(z) + (i^*)^2 \cdot z^{-2} \cdot \widetilde{e}(z)^2 + \ldots\right]$$

Utilizando as propriedades 2 e 1b) das Transformadas-z obtemos:

$$\widetilde{M}(z) = -i^* \cdot A \cdot z^{-1}(1-z^{-1})^{-1}\left[1 + i^* \cdot z^{-1} \cdot Z(e^{(1)}(t)) + (i^*)^2 \cdot z^{-2} \cdot Z(e^{(2)}(t)) + \ldots\right] =$$

$$= -i^* \cdot A \cdot (1-z^{-1})^{-1}\left[1_{\{t\ge 1\}} + i^* \cdot Z(e^{(1)}(t-2)) + (i^*)^2 \cdot Z(e^{(2)}(t-3)) + \ldots\right]$$

Assim, tendo em conta as propriedades 3 e 2 das Transformadas-z, obtemos uma expressão para $M_t = E\left[(GP)_t\right]$:

$$E\left[(GP)_t\right] = -i^* \cdot A\left[1_{\{t\ge 1\}} + i^*\sum_{k=0}^{t-2} e(k) + (i^*)^2\sum_{k=0}^{t-3} e^{(2)}(k) + \ldots (i^*)^{t-1}\sum_{j=0}^{0} e^{(t-1)}(k)\right]$$

❑

Proposição 16:

$$E[F_t] = RA - E\left[\left(\overline{RA}\right)_t\right] = RA - \sum_{k=0}^{m-1} E\left[(GP)_{t-k}\right] \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{68}$$

$$E[C_t] = CN + E\left[(AM)_t\right] = CN + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{E\left[(GP)_{t-k}\right]}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{69}$$

Proposição 17:[4]

Se $\left|i^*\right| < \left(\sum e(j)\right)^{-1}$ então $E\left[(GP)_t\right]$, $E[C_t]$ e $E[F_t]$ tem limites finitos quando $t \to \infty$ com

$$E\left[(GP)_\infty\right] = -i^*(1+i)^{-1} \frac{RA}{1 - i^* \sum_{k=0}^{m-2} e(k)} \tag{70}$$

$$E[C_\infty] = CN + \frac{m}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} E\left[(GP)_\infty\right] \tag{71}$$

$$E[F_\infty] = RA - \sum_{k=0}^{m-1} E\left[(GP)_\infty\right] \frac{\ddot{a}_{\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = RA \left[\frac{1 + \frac{i^*}{1+i}}{1 - i^* \sum_{k=0}^{m-2} e(k)} \right] \tag{72}$$

2. Momentos de 2ª ordem

Apenas vamos estudar o caso em que $E[i_t] = i$. Necessitamos de considerar duas hipóteses:

i) $E\left[(GP)_t\right] = 0, \quad \forall t \geq 1$ (73)

ii) $\left\{(GP)_t\right\}_{t \geq 1}$ é uma sequência não correlacionada se $1 \leq s \leq t$:

$$Cov\left((GP)_s, (GP)_{t+1}\right) = E\left((GP)_s, (GP)_{t+1}\right) = E\left[E\left((GP)_s, (GP)_{t+1} \middle| H_t\right)\right] =$$

$$E[i_{t+1} - i] E\left[(GP)_s \left(\sum_{k=0}^{m-2} e(j)(GP)_{t-k} - A \right) \right] = 0 \tag{74}$$

[4] Ver demonstração no Anexo VII

Proposição 18:

$$Var\left[(GP)_{t+1}\right] = \sigma^2 A^2(t-1) + \sigma^4 \sum_{k=0}^{t-2} e^2(k) A^2(t-2-k) + \sigma^6 \sum_{k=0}^{t-3} e_2^{(2)}(k) A^2(t-3-k) + \ldots$$

$$+\sigma^{2t} \sum_{k=0}^{0} e_2^{(t-1)}(k) A^2(-k) \tag{75}$$

com $e_2^{(n)}$ a n-ésima convolução de $e^2(.)$ e $A(t) = \sum_{k=t}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A$.

Demonstração:

❑

Utilizando o resultado da proposição 12 e as hipóteses anteriormente referidas e o facto de $A(t)$ não ser uma variável aleatória e depender apenas das condições iniciais, obtemos

$$Var\left[(GP)_{t+1}\right] = E\left[(GP)_{t+1}^2\right] = E\left[E\left[(GP)_{t+1}^2 | H_t\right]\right] =$$

$$\sigma^2 E\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right]^2 =$$

$$= \sigma^2 E\left[\sum_{k=0}^{\min(m-2,t-1)} e(k)(GP)_{t-k} + \sum_{k=t}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right]^2 =$$

$$= \sigma^2 \sum_{k=0}^{\min(m-2,t-1)} e^2(k) Var\left[(GP)_{t-k}\right] + \sigma^2 \left[\sum_{k=t}^{m-2} e(k)(GP)_{t-k} - A\right]^2$$

$$Var\left[(GP)_{t+1}\right] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{m-2} e^2(k) Var\left[(GP)_{t-k}\right] + \sigma^2 A^2(t) \tag{76}$$

Definindo $V_t = Var\left[(GP)_t\right]$ e tomando a Transformada-z em ambos os membros da equação anterior teremos

$$z\widetilde{V}(z) = \sigma^2 \widetilde{e}_2(z) \widetilde{V}(z) + \sigma^2 \widetilde{A}_2(z)$$

ou

$$\widetilde{V}(z) = \frac{\sigma^2 z^{-1} \widetilde{A}_2(z)}{1 - \sigma^2 z^{-1} \widetilde{e}_2(z)} \tag{77}$$

com $\tilde{e}_2(z) = \sum_{k\geq 0} e^2(k) z^{-k}$ e $\tilde{A}_2(z) = \sum_{k\geq 0} A^2(k) z^{-k}$

Utilizando a equação (77) podemos obter uma expressão mais simplificada para a $Var\left[(GP)_{t+1}\right]$:

$$\tilde{V}(z) = \sigma^2 z^{-1}\tilde{A}_2(z)\left[1 + \sigma^2 z^{-1}\tilde{e}_2(z) + \sigma^4 z^{-2}\tilde{e}_2^2(z) + \ldots\right] =$$

$$= \sigma^2 z^{-1}\tilde{A}_2(z) + \sigma^4 z^{-2}\tilde{A}_2(z)\tilde{e}_2(z) + \sigma^6 z^{-3}\tilde{A}_2(z)\tilde{e}_2^2(z) + \ldots$$

o que significa que

$$V_t = \sigma^2 A^2(t-1) + \sigma^4 \sum_{k=0}^{t-2} e^2(k) A^2(t-2-k) + \sigma^6 \sum_{k=0}^{t-3} e_2^{(2)}(k) A^2(t-3-k) + \ldots$$

$$+\sigma^{2t} \sum_{k=0}^{t-3} e_2^{(t-1)}(k) A^2(-k)$$

com $e_2^{(n)}$ a n-ésima convolução de $e^2(.)$. ❑

Proposição 19:

Podemos expressar $Var(F_t)$ e $Var(C_t)$ em termos de $(GP)_s$ com $t - m + 1 \leq s \leq t$. Das equações (54) e (55) e tendo em conta que a covariância das perdas é nula obtemos

$$Var(C_t) = \frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \sum_{k=0}^{m-1} Var\left[(GP)_{t-k}\right] \tag{78}$$

$$Var(F_t) = \frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \sum_{k=0}^{m-1} \ddot{a}^2_{\overline{m-k}|} Var\left[(GP)_{t-k}\right] \tag{79}$$

Proposição 20:[5]

i) Se $E[i_t] = i$ e se $\sigma^2 < \left(\sum e^2(k)\right)^{-1}$ então obtém-se

$$Var\left[(GP)_\infty\right] = \frac{\sigma^2 (1+i)^{-2} R A^2}{1 - \sigma^2 \sum e^2(k)} \tag{80}$$

$$Var(C_\infty) = \frac{m}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} Var\left[(GP)_\infty\right] \tag{81}$$

[5] Ver demonstração no Anexo VII

$$Var(F_\infty) = \frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \sum_{k=0}^{m-1} \ddot{a}^2_{\overline{m-k}|} Var\left[(GP)_\infty\right] \tag{82}$$

ii) Se $\sigma^2 \geq \left(\sum e^2(k)\right)^{-1}$ então os limites anteriores não existem.

Proposição 21:

Seja $E[i_t] = i$ e $0 \leq h < m$.

$$Cov(F_t, F_{t+h}) = Cov\left[\overline{(RA)}_t, \overline{(RA)}_{t+h}\right] = \frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \sum_{k=0}^{m-h-1} Var\left[(GP)_{t-k}\right] \ddot{a}_{\overline{m-k}|} \ddot{a}_{\overline{m-h-k}|}$$

$$Cov(C_t, C_{t+h}) = \frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}} \sum_{k=0}^{m-h-1} Var\left[(GP)_{t-k}\right]$$

Proposição 22:

Se $\sigma^2 < \left(\sum e^2(k)\right)^{-1}$ então

$$\lim_t \rho(F_t, F_{t+h}) = \frac{\sum_{k=0}^{m-h-1} \ddot{a}_{\overline{m-k}|} \ddot{a}_{\overline{m-h-k}|}}{\sum_{k=0}^{m-1} \ddot{a}^2_{\overline{m-k}|}}$$

$$\lim_t \rho(C_t, C_{t+h}) = 1 - \frac{h}{m}$$

As covariâncias e as correlações desaparecem quando $h \geq m$, ou seja no momento em que deixar de existir Ganhos e Perdas de anos anteriores a F_{t+h-m}.

Comparando estes dois métodos concluímos:

- no *Spread* (F_t, C_t) e (F_{t+h}, C_{t+h}) estão correlacionados por algum h. No limite a correlação é q^h, e que pode ser elevado.
- no *Amortization of Losses* a correlação entre (F_t, C_t) e (F_{t+h}, C_{t+h}) diminui rapidamente quando h aumenta e desaparece se $h \geq m$, ou seja quando já não existem Ganhos e Perdas por amortizar do ano t.

CASO PRÁTICO

1. Os Ganhos e Perdas anulam-se com o tempo?

Como já foi referido neste capítulo, quando ocorrem desvios nas hipóteses consideradas surgem ganhos ou perdas. Como o assunto em questão envolve períodos muito longos poderíamos ser levados a pensar que quando utilizamos hipóteses realistas não seria necessário fazer ajustamentos nas contribuições anuais já que estes ganhos e perdas acabariam por se compensar no tempo.

Consideremos os valores obtidos para o método Unit Credit no exemplo do Capitulo I (pág. 36) supondo que a Responsabilidade Suplementar está completamente financiada. Vamos supor que se verificam apenas desvios na taxa de rendimento durante os primeiros 23 anos de acordo com o quadro seguinte. A taxa de rentabilidade nos restantes anos será igual a 6%, taxa utilizada no cálculo da Responsabilidade Actuarial (866 095 contos) e do Custo Normal (16 396 contos) do exemplo do Capitulo I. Vamos supor que não se procede à amortização dos ganhos e perdas verificadas.

Quadro 2

Evolução da taxa de rentabilidade nos primeiros 23 anos

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7
i_t	6.00%	5.50%	5.25%	5.00%	4.50%	4.00%	3.50%	3.00%
Ano	8	9	10	11	12	13	14	15
i_t	3.25%	5.25%	5.00%	6.25%	6.50%	6.50%	7.00%	7.50%
Ano	16	17	18	19	20	21	22	23
i_t	8.00%	7.5%	7.25%	7.75%	8.00%	8.25%	8.50%	7.54%

Verifica-se que a soma dos ganhos e perdas é nula, sendo a média das taxas de rentabilidades igual a 6% e a variância amostral de .01%. No entanto o valor do fundo decresceu tendo atingido em $t = 24$ o valor de $F_{24} = 689\ 609$ contos, bastante inferior à Responsabilidade Actuarial. Se o valor do fundo for apenas alimentado com o Custo Normal e os rendimentos obtidos com uma taxa de 6% e continuar a pagar pensões no futuro, a evolução futura será decrescente, como podemos constatar no gráfico seguinte. No instante $t = 50$ o Valor do Fundo já não é suficiente para pagar as pensões desse ano.

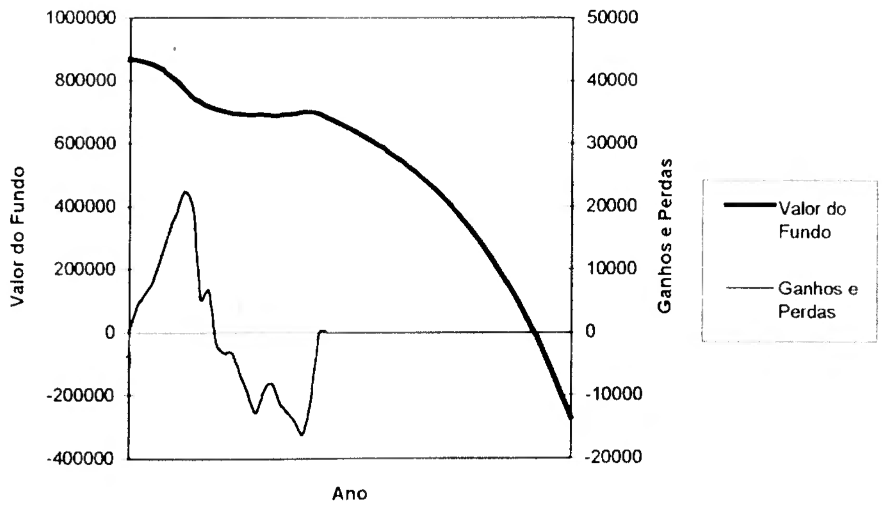


Figura 5 - Evolução decrescente do Valor do Fundo ao longo de 56 anos

Podemos então concluir que é necessário ter uma certa atenção a estes desvios sendo mais aconselhável proceder à sua amortização. Embora seja mais preocupante o subfinanciamento de um Fundo de Pensões já que este poderá não cumprir com os objectivos para os quais foi constituído, o sobrefinanciamento é também uma situação delicada: as saídas de um Fundo de Pensões estão condicionadas sendo normal apenas saídas para pagamento de cargas e das pensões, ou em situações muito especiais. O gráfico seguinte traduz uma situação semelhante ao gráfico anterior, mas em que o Fundo de Pensões tem uma evolução crescente.

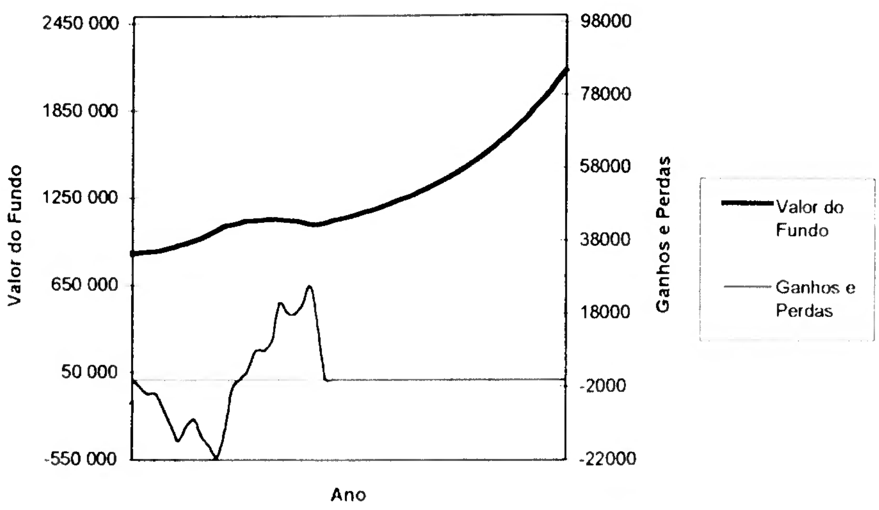


Figura 6 - Evolução crescente do Valor do Fundo ao longo de 56 anos

2. Spread *vs* Amortization of Losses

Embora existam muitas possibilidades de colmatar as perdas ocorridas ao longo do tempo e resultantes de desvios nas hipóteses consideradas, apenas vamos estudar os métodos *Spread* e *Amortization of Losses*, supondo que todas as hipóteses são consistentes com a experiência à excepção da taxa de rendimento.

Em primeiro lugar vamos verificar qual a evolução do F_t e do ${}^{gp}(CA)_t$ perante a ocorrência de desvios na taxa de rentabilidade relativamente à taxa de rendimento. Para esse efeito iremos considerar o método Unit Credit no exemplo apresentado no Capitulo I, à semelhança do número anterior, em que a taxa de rendimento considerada foi de 6%. O período de amortização será 3 anos para ambos os métodos em estudo.

Na Amortização Imediata a Responsabilidade Actuarial não financiada é amortizada na totalidade no ano seguinte à sua detecção, o que significa que o défice é aproximadamente nulo. No entanto este método em termos práticos não é o mais adequado já que produz custos muito variáveis, ocorrendo por vezes perdas de elevado montante não sendo possível para as empresas suportarem este custo.

No Quadro 3 apresenta-se a amortização da Responsabilidade Actuarial não financiada devido a desvios ocorridos na taxa de rendimento, sendo de referir que quando ocorre um ganho, como por exemplo em $t = 3$, esse valor é retirado do Fundo. Esta situação não se verifica na prática já que as saídas dum Fundo de Pensões estão condicionadas como já referimos anteriormente através de restrições legais.

Quadro 3

Amortização Imediata

Ano t	i_t	$(RA)_t$	F_t	$\overline{(RA)}_t$	$(Am)_t$	${}^{gp}(CA)_t$
0	6,00%	866 095	866 095	0	0	16 396
1	5,25%	866 095	859 967	6 128	6 128	22 524
2	4,08%	866 095	850 407	15 688	15 688	32 084
3	6,25%	866 095	868 138	-2 043	-2 043	14 353
4	6,00%	866 095	866 095	0	0	16 396
5	6,00%	866 095	866 095	0	0	16 396
6	7,00%	866 095	874 266	-8 171	-8 171	8 225
7	6,00%	866 095	866 095	0	0	16 396
8	6,50%	866 095	870 180	-4 085	-4 085	12 311
9	8,00%	866 095	882 436	-16 341	-16 341	55
10	10,00%	866 095	898 778	-32 683	-32 683	-16 287

No Quadro 4 a amortização da Responsabilidade Actuarial não financiada em $t = 1$, no valor de 6 128 contos, é feita através do método *Spread* dividindo $\overline{(RA)}_t$ por uma renda certa antecipada de 3 termos. Neste caso o défice será totalmente amortizado ao fim de 23 anos, ou seja será diluído no tempo (daí a designação de método Spread).

Quadro 4
Método Spread

Ano t	i_t	$(RA)_t$	F_t	$\overline{(RA)}_t$	$(Am)_t$	${}^{gp}(CA)_t$
0	6,00%	866 095	866 095	0	0	16 396
1	5,25%	866 095	859 967	6 128	2 163	18 559
2	6,00%	866 095	861 892	4 203	1 483	17 879
3	6,00%	866 095	863 212	2 883	1 017	17 413
4	6,00%	866 095	864 117	1 977	698	17 094
5	6,00%	866 095	864 739	1 356	479	16 875
6	6,00%	866 095	865 165	930	328	16 724
7	6,00%	866 095	865 457	638	225	16 621
8	6,00%	866 095	865 657	438	154	16 550
9	6,00%	866 095	865 795	300	106	16 502
10	6,00%	866 095	865 889	206	73	16 469
11	6,00%	866 095	865 954	141	50	16 446
12	6,00%	866 095	865 998	97	34	16 430
13	6,00%	866 095	866 028	66	23	16 419
14	6,00%	866 095	866 049	46	16	16 412
15	6,00%	866 095	866 064	31	11	16 407
16	6,00%	866 095	866 073	21	8	16 404
17	6,00%	866 095	866 080	15	5	16 401
18	6,00%	866 095	866 085	10	4	16 399
19	6,00%	866 095	866 088	7	2	16 398
20	6,00%	866 095	866 090	5	2	16 398
21	6,00%	866 095	866 092	3	1	16 397
22	6,00%	866 095	866 093	2	1	16 397
23	6,00%	866 095	866 093	2	1	16 396
24	6,00%	866 095	866 094	1	0	16 396

Para o método *Amortization of Losses* podemos verificar, através do Quadro 5, que se deixarem de ocorrer desvios, a Responsabilidade Actuarial não financiada no instante do último desvio será totalmente coberta em $m-1$ anos. Por exemplo $\overline{(RA)}_1$ foi completamente amortizada ao fim de dois anos porque nos três anos seguintes não ocorreu nenhum desvio na taxa de rentabilidade.

Quadro 5
Método Amortization of Losses

Ano t	i_t	$(RA)_t$	F_t	$\overline{(RA)}_t$	$(GP)_t$	$\frac{(GP)_t}{\ddot{a}_{\overline{3}\rvert}}$	$(Am)_t$	${}^{gp}(CA)_t$
0	6,00%	866 095	866 095	0	0	0	0	16 396
1	5,25%	866 095	859 967	6 128	6 128	2163	2 163	18 559
2	6,00%	866 095	861 892	4 203	0	0	2 163	18 559
3	6,00%	866 095	863 932	2 163	0	0	2 163	18 559
4	6,00%	866 095	866 095	0	0	0	0	16 396
5	5,75%	866 095	864 052	2 043	2 043	721	721	17 117
6	5,50%	866 095	860 615	5 480	4 079	1440	2 160	18 556
7	6,25%	866 095	864 611	1 484	-2 034	-718	1 442	17 838
8	7,00%	866 095	874 221	-8 126	-8 170	-2884	-2 162	14 234
9	7,50%	866 095	884 762	-18 667	-12 346	-4357	-7 959	8 437
10	6,00%	866 095	877 446	-11 351	0	0	-7 241	9 155
11	6,00%	866 095	870 452	-4 357	0	0	-4 357	12 039
12	6,00%	866 095	866 095	0	0	0	0	16 396
13	6,00%	866 095	866 095	0	0	0	0	16 396

No gráfico seguinte podemos analisar a evolução do Valor do Fundo e da Contribuição ao longo de 20 anos, para os dois métodos em estudo, para o seguinte conjunto dos valores observados

Quadro 6
Evolução da taxa de rentabilidade nos primeiros 20 anos

Ano	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i_t	6.00%	5.25%	5.50%	4.75%	4.00%	3.00%	2.50%	5.00%	6.00%	7.00%
Ano	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
i_t	7.50%	7.25%	7.00%	6.25%	6.00%	6.00%	6.25%	6.00%	6.50%	5.75%

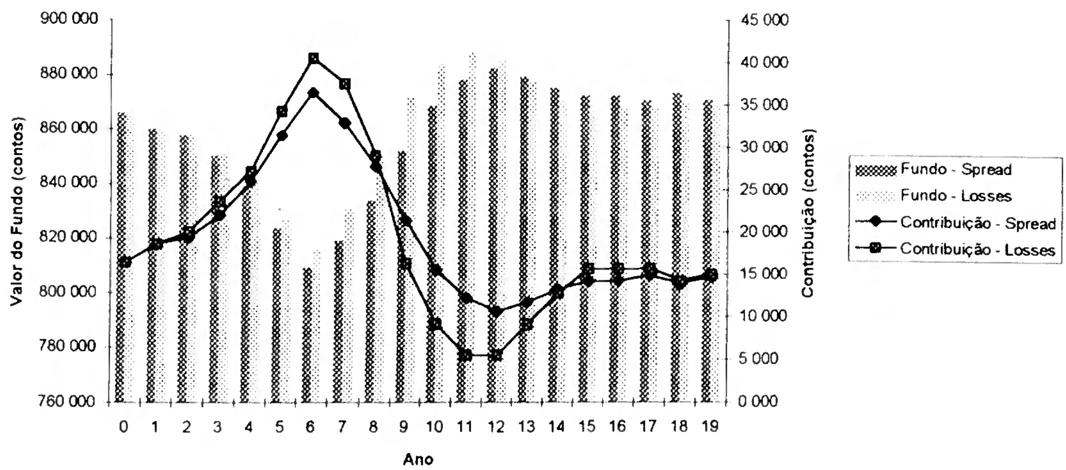


Figura 7 - Evolução do Valor do Fundo e da Contribuição ao longo de 20 anos para os dois métodos em estudo

3. Dispersão do Valor do Fundo e da Contribuição

Vamos analisar o desvio padrão relativo dos valores F_t e de C_t com a alteração de *m*. Utilizaremos os valores obtidos para o método Aggregate do exemplo do Capitulo I.

3.1. Método Spread

Se $E[i_t] = i$ então

$$\lim_{t \to \infty} E[F_t] = {}^{Agg}RA$$

$$\lim_{t \to \infty} E[C_t] = {}^{Agg}CN$$

com ${}^{Agg}RA$ e ${}^{Agg}CN$ a Responsabilidade Actuarial e o Custo Normal obtidos para o método Aggregate.

O Aggregate é um método de Custo Agregado com

$$q_t = q = u_e(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}})$$

$$k_t = k = q^2(1 + \frac{\sigma^2}{u^2}) < 1$$

Nestas condições podemos utilizar a Proposição 8 com $\ddot{a}_{\overline{m}|} = VASF$,

$$Var(F_\infty) = \frac{\sigma^2}{u_e^2} \frac{E(F_\infty)^2}{1-k}$$

$$Var(C_\infty) = \frac{Var(F_\infty)}{\ddot{a}^2_{\overline{m}|}}$$

Nos cálculos apresentados vamos considerar $\ddot{a}_{\overline{m}|}$ uma renda certa postecipada de m termos em percentagem da Massa Salarial. Os valores da Responsabilidade Actuarial e do Custo Normal obtidos no Capitulo I são:

$$\frac{RA}{MS} = 780.04\%$$

$$\frac{CN}{MS} = 5.02\%$$

Quadro 7

Método Spread

	$\sigma = 1\%$		$\sigma = 2\%$		$\sigma = 4\%$	
m	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$
1	0,9%	146,6%	1,9%	293,1%	3,8%	586,2%
5	1,7%	57,7%	3,3%	115,5%	6,6%	231,2%
10	2,5%	49,2%	4,9%	98,4%	9,9%	197,5%
15	3,3%	49,1%	6,5%	98,2%	13,1%	197,9%
20	4,1%	52,1%	8,2%	104,2%	16,5%	210,9%
25	5,0%	57,0%	9,9%	114,0%	20,2%	232,1%
30	6,0%	63,5%	11,9%	126,9%	24,5%	260,7%
35	7,1%	71,5%	14,2%	143,0%	29,4%	297,2%
40	8,3%	81,2%	16,7%	162,5%	35,2%	343,1%
45	9,8%	92,8%	19,6%	185,6%	42,3%	400,9%

3.2. Amortization of Losses

Para o método Amortization of Losses podemos utilizar a proposição 20 já que $\sigma^2 < \left(\sum_{k=0}^{m-2} e^2(k) \right)^{-1}$ como podemos verificar através do quadro seguinte:

Quadro 8

Alguns cálculos auxiliares

m	$\frac{1}{\ddot{a}^2_{\overline{m\vert}}}\sum_{k=0}^{m-1}\ddot{a}^2_{\overline{m-k\vert}}$	$\sum_{k=0}^{m-2} e^2(k)$
1	1,000	0,000
5	2,319	1,174
10	4,347	0,132
15	6,648	0,118
20	9,215	0,114
25	12,043	0,116
30	15,124	0,121

Quadro 9

Método Amortization of Losses

	$\sigma = 1\%$		$\sigma = 2\%$		$\sigma = 4\%$	
m	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$	$\frac{(Var(F_\infty))^{\frac{1}{2}}}{RA}$	$\frac{(Var(C_\infty))^{\frac{1}{2}}}{CN}$
1	0,9%	146,6%	1,9%	293,1%	3,8%	586,2%
5	1,4%	73,4%	2,9%	146,8%	5,8%	293,8%
10	2,0%	59,4%	3,9%	118,8%	7,9%	237,6%
15	2,4%	55,1%	4,9%	110,3%	9,7%	220,6%
20	2,9%	53,9%	5,7%	107,8%	11,5%	215,7%
25	3,3%	54,1%	6,5%	108,2%	13,1%	216,3%
30	3,7%	55,0%	7,3%	110,0%	14,7%	220,1%
35	4,1%	56,4%	8,1%	112,8%	16,2%	225,7%
40	4,4%	58,1%	8,8%	116,2%	17,7%	232,5%

3.3. Análise dos valores obtidos

Comparando os Quadros 7 e 9 para o mesmo valor de m verificamos que

- As primeiras linhas dos quadros coincidem já que os métodos são iguais se $m = 1$. Embora este caso represente a Amortização Imediata existe dispersão no valor do Fundo já que a amortização só é feita no ano seguinte à sua detecção. Relativamente às contribuições a dispersão é elevada já que se amortiza os Ganhos e Perdas na totalidade podendo os montantes em causa ser bastantes elevados e variáveis.
- É dada maior importância aos benefícios no Amortization of Losses já que o desvio padrão é menor neste método. Repare-se que, de acordo com os quadros

para o Spread que é superior ao dobro do desvio padrão do Amortization of Losses.

- No entanto as contribuições tem uma variância menor no Spread e são mais estáveis, como se pode verificar através da figura 7 e do quadro 7.
- O desvio padrão de F_∞ e C_∞ é aproximadamente linear com σ, e essa linearidade desaparece gradualmente quando σ e m crescem.
- Fazendo $m^* = 15$ para o Spread e $m^* = 25$ para o Amortization of Losses verificamos que :

  Com $m \leq m^*$ se aumentarmos m a $Var(C_t)$ diminui mas a $Var(F_t)$ aumenta.

  Com $m > m^*$ se aumentarmos m a $Var(C_t)$ aumenta assim como a $Var(F_t)$.
- Assim, na óptica de minimizar as variâncias devemos rejeitar $m > m^*$, o que significa que o intervalo $\left[1, m^*\right]$ constitui a região óptima para o valor de m.

A figura seguinte mostra-nos o comportamento dos desvios padrão no *Spread* com $\sigma = 2\%$.

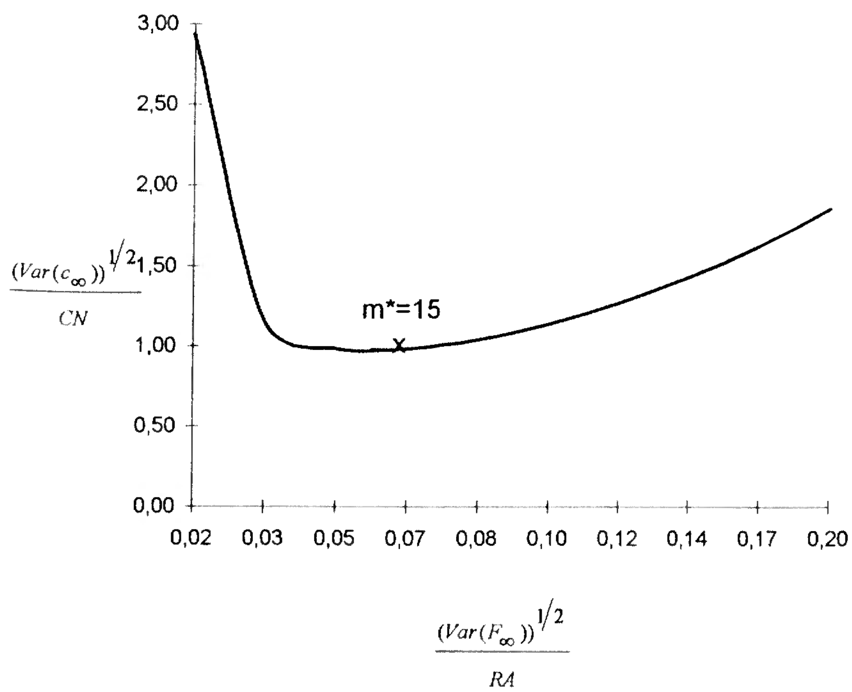


Figura 8 - Evolução dos desvios padrão para o método *Spread*

CONCLUSÕES

CONCLUSÕES

À semelhança de outros países, a viabilidade do Sistema da Segurança Social tem vindo a ser questionada em Portugal estando-se já a equacionar a reforma deste sistema que terá que passar necessariamente pelo desenvolvimento do sector privado, o 2º Pilar, onde se enquadram os Fundos de Pensões. Os primeiros Fundos de Pensões surgiram em Portugal em 1987, existindo 226 fundos em 1995 que representavam 8% do PIB, sendo já um importante instrumento financeiro na complementaridade da Segurança Social e no financiamento dos planos de pensões implementados pelas empresas e um dos principais investidores no mercado de capitais português.

Neste enquadramento, e perante uma origem tão recente e dado o grande potencial de crescimento dos Fundos de Pensões, o conhecimento actuarial nesta área será ainda insuficiente, sendo desejável que os actuários portugueses façam estudos quer ao nível prático como também ao nível teórico.

O objectivo principal desta dissertação aquando da sua realização foi inicializar uma abordagem teórica sobre a introdução de condições dinâmicas no cálculo das responsabilidades inerentes aos planos de pensões. Pensamos que esse objectivo foi alcançado numa primeira fase embora, e após a sua concretização, tenha ficado a certeza de existir ainda muito para estudar e analisar, sendo interessante a continuação deste trabalho por exemplo através da quantificação, em termos práticos, dos custos da não utilização de condições dinâmicas nos estudos actuariais.

Pensamos que urge a definição de uma terminologia portuguesa para os conceitos actuariais utilizados na área dos Fundos de Pensões, tendo sido apresentado no Capítulo I um pequeno glossário com os conceitos actuariais imprescindíveis para a apresentação deste trabalho e que poderá ser utilizado como ponto de partida para o estabelecimento dessa terminologia. Fez-se ainda uma classificação geral dos métodos de financiamento de um plano de pensões que abrange os métodos utilizados em Portugal e que são referidos em *Trowbridge* (1952).

No Capítulo II fez-se o estudo das funções actuariais utilizadas no cálculo das responsabilidades considerando uma população dinâmica mas que tem subjacente uma força de mortalidade constante. Assim, seria interessante a mesma análise mas considerando uma tábua de mortalidade cuja força de mortalidade fosse também dinâmica. Poder-se-ia ainda fazer um estudo comparativo, em termos práticos, das avaliações actuariais considerando, ou não, condições dinâmicas na população, no salário e na taxa de rendimento.

Dado o produto em questão é necessário que haja segurança e que as contribuições a entregar pelas empresas não ascendam valores incomportáveis para estas. Assim, o tema abordado no Capitulo III - os Ganhos e Perdas Actuariais - é bastante importante na medida em que, como pudemos constatar, a não amortização desses ganhos e perdas poderá levar a um subfinanciamento ou sobrefinanciamento do Fundo de Pensões. Neste estudo apenas analisamos os desvios ocorridos devido à variação da taxa de rentabilidade, sendo de todo o interesse estudar por exemplo os desvios ocorridos na mortalidade, nas saídas, na invalidez, ... Repare-se que, por exemplo, as taxas de crescimento salarial e de rendimento do Fundo são revistas frequentemente tendo em conta o contexto económico da altura, mas que as tábuas utilizadas se mantém por muito mais tempo.

Finalmente, e a jeito de conclusão, referimos que ainda existe muito para estudar nesta área sendo de todo o interesse a continuação deste trabalho que apenas pretendeu ser uma introdução a esta temática ...

ANEXOS

NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

1. NOTAÇÃO

i) Nas várias funções apresentadas utilizaremos x e t em *subscript* para indicar que a função se aplica a um indivíduo com idade x no instante t. Poderemos omitir x e t se daí não surgir confusão.

ii) Os Métodos de Financiamento das responsabilidades inerentes a um Plano de Pensões são classificados neste trabalho em Métodos Individuais e Métodos Agregados. Assim, os conceitos por eles utilizados dizem respeito, respectivamente, a cálculos feitos individualmente para cada participante ou para todo o grupo de membros do plano.

Por essa razão utilizaremos como notação x,t ou t em *subscript* caso se trate do primeiro ou do segundo caso. Por exemplo, $(CN)_{x,t}$ representa o Custo Normal para um indivíduo de idade x no instante t, enquanto que $(CN)_t$ designa o Custo Normal calculado, no instante t, para todo o grupo de membros do plano.

iii) Nas anuidades, e por uma questão de simplificação, a taxa de rendimento não é mostrada quando implícita no contexto. Caso seja necessário indicar-se-á a força de capitalização ou a taxa de rendimento em *superscript*, por exemplo $\bar{a}^{\delta}_{\overline{n}|}$.

iv) Quando as funções actuariais forem aplicadas somente à população activa (ou reformada) representaremos estas funções colocando previamente a (ou r) antes das iniciais da função. Por exemplo $(aRA)_t$, representa no instante t, a Responsabilidade Actuarial para a população activa e $(rRA)_t$ representa a Responsabilidade Actuarial para a população reformada.

2. SIMBOLOGIA

Vamos descrever os vários símbolos utilizados neste trabalho através de uma descrição sumária do seu significado e, ainda, o número de página onde esse conceito se encontra pela primeira vez descrito.

2.1. Características da população em estudo

Símbolo	Descrição	Página
a	idade de entrada para o plano	6
r	idade a partir da qual todos os membros se reformam por velhice	6
w	idade limite, ou seja a idade em que já não se encontra nenhum indivíduo vivo	6

2.2. Conceitos Actuariais

Embora se tenha utilizado neste trabalho o caso discreto e o caso contínuo não iremos aqui fazer essa distinção para as anuidades. É que em termos de notação estes dois casos são semelhantes: por exemplo a_r^h representa uma Renda Vitalícia postecipada e $\ddot{a}_r^h$ uma renda antecipada, ambas no caso discreto, e $\bar{a}_r^h$ uma Renda Vitalícia contínua.

Símbolo	Descrição	Página
$l_{x,t}$	número de indivíduos com idade x no instante t	9
${}_{r-x}p_x$	probabilidade do indivíduo de idade x ainda estar ao serviço quando atingir r anos (utiliza os decrementos envolvidos)	11
$\mu_{x,t}$	força de saída para um indivíduo de idade x no instante t	49
$\bar{a}_r^h$	Renda Vitalícia Imediata contínua actualizada a uma função $h(x)$	11
$\bar{a}_{x:\overline{r-x}\rvert}$	Renda Temporária Imediata contínua que tem em conta todos os decrementos que actuam durante o período activo	18
$\bar{a}^s_{x:\overline{r-x}\rvert}$	Valor Actual dos Salários Futuros para um indivíduo de idade x, considerando o salário unitário à idade x	19
${}_{r-x\rvert}\bar{a}_x^h$	Renda Vitalícia Diferida contínua actualizada a uma função $h(x)$	27
$a_{\overline{r-x}\rvert}$	Renda certa com r - x termos	73
$s_{x:\overline{r-x}\rvert}$	Valor acumulado	73

2.3. Pressupostos actuariais e financeiros

Símbolo	Descrição	Página
$s_{x,t}$	salário do indivíduo x no instante t	50
s_x^m	crescimento verificado no salário, desde a idade a até a idade x, devido à componente mérito	50
s_t^p	crescimento verificado no salário, desde o instante t-x+a até ao instante t, devido à componente produtividade	50
s_t^i	crescimento verificado no salário, desde o instante t-x+a até ao instante t, devido à componente inflação	50
s_t^g	$s_t^p \cdot s_t^i$	50
S_x	$= \int_a^x s_y dy$	15
$(MS)_t$	Massa Salarial da população no instante t	50
$h(x)$	actualização verificada na pensão desde a idade r até à idade x	9
i	taxa de rendimento do Fundo	9
i_t	taxa de rentabilidade no instante t, considerando i_t uma variável aleatória i.i.d.	83
i_e	$= E[i_t]$	84
i^*	$= E[i_t] - i$	84
v	$= (1+i)^{-1}$	11
d	$= \dfrac{i}{1+i}$	83
d_e	$= \dfrac{i_e}{1+i_e}$	84
σ	Desvio padrão de i_t	83
δ	força de capitalização	9
α	Crescimento exponencial na população: $l_{x,t} = l_x \cdot e^{\alpha(t+r-x)}$	67
γ	Crescimento exponencial nas componentes inflação e produtividade do salário: $s_t^g = e^{\gamma t}$	67
θ	$\theta = \alpha + \gamma$	69
λ	$\lambda = \delta - \theta$	71

2.4. Funções Actuariais

Símbolo	Descrição	Página
b_x	Acréscimo de benefício acrescido à idade x	10
B_x	Benefício acrescido acumulado até à idade x	10
P_t	Total das pensões pagas aos reformados no instante t	53
C_t	Total das contribuições para o fundo realizadas durante o ano t	63
C^*	$= C_t - E[C_t]$	97
F_t	Valor do Fundo no instante t	63
F^*	$= F_t - E[F_t]$	96
(BT)	Valor Actual dos Benefícios Totais	10
(CN)	Custo Normal	11
${}^{T}(CN)$	Custo Normal para o Terminal Funding	53
${}^{I}(CN)$	Custo Normal para o Initial Funding	
(CS)	Custo Suplementar	12
(CA)	Custo Anual $=(CN)+(CS)$	12
(CNP)	Valor Actual dos Custos Normais passados	11
(CNF)	Valor Actual dos Custos Normais futuros	11
(CSP)	Valor Actual dos Custos Suplementares passados	12
(CSF)	Valor actual dos Custos Suplementares futuros	12
(RA)	Responsabilidade Actuarial	11
(RS)	Responsabilidade Suplementar	12
$\overline{(RA)}$	Responsabilidade Actuarial não financiada	13
$\overline{(RS)}$	Responsabilidade Suplementar não amortizada	23
$\overline{(FIL)}$	Parte não amortizada da Responsabilidade Suplementar calculada de acordo com o Frozen Initial Liability	31
(GP)	Total dos Ganhos e Perdas Actuariais	13
(Am)	Amortização dos Ganhos e Perdas de acordo com um determinado método	13
${}^{gp}(CA)$	Soma do Custo Normal com a amortização dos Ganhos e Perdas	13

2.5. Funções Auxiliares

Símbolo	Descrição	Página
$M_{x,t}$	$=\dfrac{(RA)_{x,t}}{(BT)_{x,t}}$	51
$m_{x,t}$	$=\dfrac{\partial M_{x,t}}{\partial x}$	51
$g(t)$	Função contínua em $\Re$ e tal que $l_{x,t} = l_x \cdot g(t+r-x)$	45
$\bar{a}(t)$	$=\dfrac{(CNF)_t}{(CN)_t}$	64
x_λ	$e^{\lambda \cdot x_\lambda} = \int_a^r e^{\lambda \cdot x} m_{x,t} dx$	71
P_t^r	Montante total das pensões pagas no instante t aos novos beneficiários	53

EQUIVALÊNCIA ENTRE CONCEITOS

Como não existe em Portugal uma terminologia para os conceitos e para a classificação dos Métodos de Financiamento na área dos Fundos de Pensões, foi realizado um primeiro esboço desses termos nesta dissertação. Assim, torna-se útil a correspondência entre os termos mais utilizados no trabalho e a terminologia em inglês.

1. CONCEITOS

Acréscimo de Benefício	⇔	Benefit Accrual
Benefício Acrescido Acumulado	⇔	Accrued Benefit
Custo Normal	⇔	Normal Cost
Custo Suplementar	⇔	Supplemental Cost
Ganhos e Perdas Actuariais	⇔	Actuarial Gains and Losses
Responsabilidade Actuarial	⇔	Actuarial Liability
Responsabilidade Actuarial não financiada	⇔	Unfunded Liability
Responsabilidade Suplementar	⇔	Supplemental Liability
Valor Actual dos Benefícios Totais	⇔	Present Value of Future Benefits
Equação de equilíbrio	⇔	Liability growth equation
Valor do Fundo	⇔	Assets

2. MÉTODOS

Métodos de Custo Individual	⇔	Individual Cost Methods
Métodos de Custo Agregado	⇔	Aggregate Cost Methods
Métodos de financiamento baseados nos Acréscimos de Benefício	⇔	Accrued Benefit Cost Methods
Métodos de financiamento baseados nos Benefícios Totais	⇔	Projected Benefit Cost Methods

REGRAS E TEOREMAS MATEMÁTICOS

1. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ANÁLISE[1]

Seja $f: I \to \Re$ uma função integrável em cada intervalo limitado e fechado contido no intervalo I e seja φ um integral indefinido de f (com origem num ponto qualquer de I). Então, se f é contínua à direita no ponto c, φ admite no mesmo ponto derivada lateral direita, e verifica-se a igualdade $\varphi_c'^{(d)} = f(c)$ (de modo análogo, se f é contínua à esquerda em c, existe $\varphi_c'^{(e)}$ e tem-se $\varphi_c'^{(e)} = f(c)$).

2. REGRA DE LEIBNITZ PARA A DIFERENCIAÇÃO DE INTEGRAIS[2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,t)dt = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f(x,\phi_2(x))\frac{\partial}{\partial x}\phi_2(x) - f(x,\phi_1(x))\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x)$$

Obtém-se um caso particular desta regra se substituirmos $f(x, t)$ por $f(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(t)dt = f(\phi_2(x))\frac{\partial}{\partial x}\phi_2(x) - f(\phi_1(x))\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x)$$

3. TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA O CÁLCULO INTEGRAL

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas e integráveis no intervalo $[a,b]$, então existe ε tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\varepsilon)\int_a^r f(x)$$

4. DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE[3] DE $(a-bx)^{-1}$

$$(a-bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \ldots\right)$$

[1] Ferreira, J. C., (1985). *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, pág. 541
[2] Spiegel, M. R (1973). *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Colecção Schäun, McGraw-Hill, pág. 95
[3] Manuel Aberto, Isabel Amaro (1988). *Matemática Formulário*, pág. 23

5. REGRA DE L'HOSPITAL[4]

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas e deriváveis no intervalo $]a,b[$ com $g'(x) \neq 0$. Além disso, admita-se que as funções $f(x)$ e $g(x)$ convergem ambas para 0 quando $x \to \infty$.

Se

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

então têm-se

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

[4] Ostrowski, A.(1960). *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, Fundação Calouste Gulbenkian, Volume I, pág. 324

RELAÇÕES ACTUARIAIS

D_x e N_x representam os simbolos de comutação utilizados na *Ciência Actuarial*:

$$D_x = v^x \cdot l_x$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t}$$

Para o caso contínuo teremos

$$\overline{D}_x = \int_0^1 D_{x+t} dx$$

$$\overline{N}_x = \int_0^w \overline{D}_{x+t} dx = \int_x^w D_y dy$$

Seja $D_x^h = D_x \cdot h(x)$ e $\overline{N}_x^h = \int_x^w D_y^h dy$

A anuidade $\overline{a}_x^h$ representa uma anuidade contínua actualizada com a taxa $h(x)$ e calcula-se através da expressão

$$\overline{a}_x^h = \int_0^w \frac{D_{x+t} \cdot h(x+t)}{D_x} dx = \int_0^w \frac{D_{x+t}^h}{D_x} dx \qquad (1)$$

Seja $\overline{D}_x = \int_0^1 D_{x+t} dx$ e $\overline{N}_x = \int_0^w \overline{D}_{x+t} dx$ então poderemos escrever (1) mais simplificadamente

$$\overline{a}_x^h = \frac{\overline{N}_x^h}{D_x}$$

Vamos agora apresentar algumas relações actuariais conhecidas e que são utilizadas neste trabalho:

- $\dfrac{dl_x}{dx} = -l_x \cdot \mu_x$
- $\dfrac{dD_x}{dx} = -D_x(\mu_x + \delta)$

- $$\frac{d\overline{N}_x^h}{dx} = -D_x$$

- $$\frac{d\overline{a}_x^h}{dx} = \overline{a}_x^h\left(\mu_x + \delta\right) - h(x)$$

- $$\lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}$$

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Diz-se $\{x(t); t \in T\}$ é um **Processo Estocástico** se é uma familia de variáveis aleatórias, indexadas por um certo parametro t.

Uma trajectória de um processo estocástico $\{x(t); t \in T\}$ é uma afectação, para cada $t \in T$, de um valor possivel para $x(t)$.

Um processo estocástico goza da **propriedade de Markov** se

$$P\left(x(t) \in \left]a,b\right] \middle| x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \ldots x(t_k) = x_k\right) = P\left(x(t) \in \left]a,b\right] \middle| x(t_k) = x_k\right)$$

$$\forall k \in N, \forall t_1, t_2, \ldots, t_k \in T, t_1 < t_2 < \ldots < t_k, \forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$$

Um Processo estocástico que verifica a propriedade de Markov diz-se **Processo de Markov**.

TRANSFORMADAS - Z

As transformadas - z são equivalentes às transformadas de Laplace mas utilizadas para o caso discreto.

Diz-se que $\tilde{x}(z)$ é a transformada - z da variável $x(t)$ se

$$\tilde{x}(z) = Z[x(t)] = \sum_{t \geq 0} z^{-t} x(t)$$

Propriedades:

1. Translação $(h > 0)$

a) $Z[x(t+h)] = z^h Z[x(t)] - \sum_{t \geq 0}^{h-1} x(t) z^{h-t}$

Em particular

$$Z[x(t+1)] = zZ[x(t)] - z.x(0)$$

b) Se $x(t) = 0 \ \forall t < 0$ então $Z[x(t-h)] = z^{-h} Z[x(t)]$

2. Convoluções

Definindo a convolução de $x(.)$ e $y(.)$ com $x(t) = y(t) = 0 \ \forall t < 0$ como sendo

$$(x * y)(t) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j) \times y(j)$$

obtemos

$$Z[(x * y)(t)] = Z[x(t)] Z[y(t)]$$

3. Soma

Trata-se de um caso particular da propriedade 2. Se

$$x(t) = \sum_{j=0}^{t} y(j)$$

então

$$Z[x(t)] = Z[1] Z[y(t)] = \left(1 - z^{-1}\right)^{-1} Z[y(t)]$$

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

1. Particularização das funções $m_{x,t}$ e $M_{x,t}$ para o Unit Credit e Entry Age (Capitulo II, pág. 51)

O Custo Normal para o Unit Credit é dado pelo Quadro 1 apresentado no Capitulo I, e portanto teremos para $m_{x,t}$ a seguinte expressão:

$$m_{x,t} = m_x = \frac{\dfrac{(BT)_x}{r-a}}{(BT)_x} = \frac{1}{r-a}$$

O valor de $M_{x,t}$ obtêm-se de

$$M_{x,t} = M_x = \int_a^x m_y dy = \int_a^x \frac{1}{r-a} dy = \frac{x-a}{r-a}$$

O Custo Normal do Entry-Age foi apresentado no Capitulo I como sendo $S \cdot s_x$ com $S = \dfrac{(BT)_a}{s_a \cdot \bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}}$. Então

$$m_{x,t} = \frac{\dfrac{(BT)_a}{s_a \cdot \bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}} s_{x,t}}{(BT)_x} = \frac{(BT)_a}{(BT)_x} \cdot \frac{s_x^m \cdot s_t^g}{\bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}} = \frac{D_x}{D_a} \cdot \frac{s_x^m}{\int_a^r s_y^m \frac{D_y}{D_a} dy} = \frac{s_x^m \cdot D_x}{\int_a^r s_y^m \cdot D_y dy}$$

Como a Responsabilidade Actuarial para o Entry Age é igual a $\dfrac{\bar{a}^s_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}} (BT)_x$

podemos escrever

$$M_{x,t} = \frac{\bar{a}^s_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}^s_{a:\overline{r-a}|}} = \frac{\int_a^x s_{y,t} \frac{D_y}{D_a} dy}{\int_a^r s_{y,t} \frac{D_y}{D_a} dy} = \frac{\int_a^x s_y^m \cdot D_y dy}{\int_a^r s_y^m \cdot D_y dy}$$

2. $\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = 0$

(Capítulo II, pág. 53)

Sabemos que $M_{x,t} = \int_a^x m_{y,t+y-x} dy$, o que significa que

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = \int_a^x \frac{\partial}{\partial t} m_{y,t+y-x} dy$$

se tivermos em conta a Regra de Leibnitz para a diferenciação de integrais (ver Anexo III).

Mas se utilizarmos o resultado

$$\frac{d}{dx} F(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

com $u = y$ e $v = t + y - x$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} m_{y,t+y-x} = \frac{\partial}{\partial u} m_{y,t+y-x} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial v} m_{y,t+y-x} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_{y,t+y-x} = \frac{\partial}{\partial u} m_{y,t+y-x} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial v} m_{y,t+y-x} \cdot 1$$

Portanto $\frac{\partial}{\partial t} m_{y,t+y-x} = -\frac{\partial}{\partial x} m_{y,t+y-x}$.

Assim, $\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = -\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} m_{y,t+y-x} dy$

Mas tendo em conta que

$$m_{x,t} = \frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x m_{y,t+y-x} dy = m_{x,t} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} m_{y,t+y-x} dy$$

conclui-se que $\frac{\partial}{\partial t} M_{x,t} = 0$

3. $$\bar{a}(t) = \frac{(CNF)_t}{(CN)_t} = \frac{\int_a^r l_{x,t} \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx}{\int_a^r l_{x,t} dx}$$

(Capítulo II, pág. 65)

$$(CNF)_t = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (CNF)_{x,t} dx = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} (1 - M_{x,t}) dx =$$

$$= \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \left(1 - \frac{\bar{N}_a - \bar{N}_x}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \right) dx = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \frac{\bar{D}_x}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_r}{\bar{D}_x} dx$$

$$= \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot \frac{\bar{D}_r}{\bar{D}_x} \cdot \bar{a}_r^h \cdot \frac{\bar{D}_x}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx = B_r \cdot \bar{a}_r^h \cdot \frac{\bar{D}_r}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \int_a^r l_{x,t} \cdot \bar{a}_{x:\overline{r-x}|} dx$$

$$(CN)_t = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (CN)_{x,t} dx = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \cdot m_{x,t} dx =$$

$$= \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \cdot \left(- \frac{1}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{N}_x dx = \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot (BT)_{x,t} \cdot \frac{1}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \cdot \bar{D}_x dx =$$

$$= \int_a^r l_{x,t} \cdot B_r \cdot \frac{\bar{D}_r}{\bar{D}_x} \cdot \bar{a}_r^h \cdot \frac{1}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \cdot \bar{D}_x dx = B_r \cdot \bar{a}_r^h \cdot \frac{\bar{D}_r}{\bar{N}_a - \bar{N}_r} \int_a^r l_{x,t} dx$$

Assim obtemos a expressão desejada.

4. Proposições 17 e 20

(Capítulo III, pág. 104 e 106)

Seja

$$x(t) = \sum_{j=0}^{t} y^{(n)}(j) \tag{1}$$

com $y^{(n)}(.)$ a n-ésima convolução de $y(.)$.

Suponhamos que $\exists k \in N$ tal que

$$y(j) = 0 \, , \, j > k$$

Neste caso obtemos

$$y^{(1)}(j) = 0 \, , \, j > k$$

$$y^{(2)}(j) = \sum_{i=0}^{j} y(i)y(j-i) = 0 \, , \, j > 2k$$

...

Então a função $x(t)$ é constante e igual a $x(nk)$ para $t \geq nk$.

Aplicando Transformadas-z a ambos os membros da equação (1) obtemos

$$\widetilde{x}(z) = [\widetilde{y}(z)]^n \left(1 - z^{-1}\right)^{-1} \qquad (2)$$

Mas $\widetilde{x}(z)$ pode ser obtido doutro modo, utilizando as propriedades das Transformadas-z :

$$\sum_{j \geq 0} (x(j+1) - x(j)) z^{-j} = (z-1) \cdot \widetilde{x}(z) - z \cdot x(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-1) \cdot \widetilde{x}(z) = \sum_{j=0}^{nk-1} z^{-j} \left(x(j+1) - x(j) \right) + z \cdot x(0)$$

Aplicando limites a ambos os membros da equação (2) e da equação anterior conseguimos alcançar uma expressão para $x(nk)$:

$$\lim_{z \to 1} (z-1) \cdot \widetilde{x}(z) = \lim_{z \to 1} (\widetilde{y}(z))^n \frac{z-1}{1-z^{-1}} = \left[\sum_{j \geq 0} y(j) \right]^n$$

$$\lim_{z \to 1} \sum_{j=0}^{nk-1} z^{-j} \left(x(j+1) - x(j) \right) + z \cdot x(0) = \sum_{j=0}^{nk-1} \left(x(j+1) - x(j) \right) + x(0) =$$

$$= x(1) + x(2) + \ldots + x(nk) - x(0) - x(1) - \ldots - x(nk-1) + x(0) = x(nk)$$

Então

$$x(nk) = \left[\sum_{j \geq 0} y(j) \right]^n \qquad (3)$$

Tendo em atenção que $x(t)$ é constante e igual a $x(nk)$ para $t \geq nk$, resulta

$$x(t) = \left[\sum_{j \geq 0} y(j) \right]^n , t \geq nk \qquad (4)$$

3.1. Proposição 18

3.1.1. Vamos assumir que as condições iniciais são nulas.

i) Suponhamos que $0 < i^* < \left(\sum_{j \geq 0} e(j) \right)^{-1}$ com $y(j) = i^* \cdot e(j)$. Nestas condições

$$0 < \tilde{y}(1) = \sum_{j \geq 0} y(j) = i^* \sum_{j \geq 0} e(j) < 1$$

É suficiente mostrar que cada uma das parcelas da função $g(t)$,

$$g(t) = 1 + \sum_{j=0}^{t-1} y(j) + \sum_{j=0}^{t-2} y^{(2)}(j) + \ldots$$

tem limite finito, para concluirmos que $E[(GP)_t]$ tem um limite finito tendo em conta a equação (64) do Capitulo III.

Cada uma das parcelas da função $g(t)$, $\sum_{j=0}^{t-n} y^{(n)}(j)$, está nas condições do resultado (4) porque existe k tal que $y^{(n)}(j) = 0, \forall j \geq k$, já que $e(j) = 0$ para $j \geq m - 2$. Então

$$\sum_{j=0}^{t-n} y^{(n)}(j) = \left(\sum_{j \geq 0} y(j) \right)^n = (\tilde{y}(1))^n \text{ para } t \geq nk \text{ e para algum } k.$$

Então $0 \leq g(t) \leq 1 + \tilde{y}(1) + \tilde{y}(1)^2 + \ldots = (1 - \tilde{y}(1))^{-1} < \infty$, com $g(t)$ uma função crescente com t, o que significa que $g(t)$ converge em $\Re$.

ii) Seja $-\left(\sum_{j \geq 0} e(j) \right)^{-1} < i^* < 0$ e suponhamos $y(j) = -i^* \cdot e(j)$. Então

$$0 < \tilde{y}(1) = \sum y(j) < 1$$

Vamos mostrar que a função

$$h(t) = 1 - \sum_{j=0}^{t-1} y(j) + \sum_{j=0}^{t-2} y^{(2)}(j) - \ldots$$

tem limite finito quando $t \to \infty$.

Se $n > 0$ então

$$|h(t+n)-h(t)| = \left| \sum_{j=t}^{t+n-1} y(j) - \sum_{j=t-1}^{t+n-2} y^{(2)}(j) + \sum_{j=t-2}^{t+n-3} y^{(3)}(j) - \ldots \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=t}^{t+n-1} y(j) + \sum_{j=t-1}^{t+n-2} y^{(2)}(j) + \sum_{j=t-2}^{t+n-3} y^{(3)}(j) - \ldots = |g(t+n) - g(t)|$$

Mas $\{g(t)\}_{t\geq 1}$ é uma sucessão de Cauchy e portanto $\{h(t)\}_{t\geq 1}$ também é uma sucessão de Cauchy, o que significa que $h(t)$ converge em $\Re$.

iii) De i) e ii) sabemos que $E[(GP)_\infty]$ é finito. Suponhamos que $\lim_{t\to\infty} E[(GP)_t] = S$.

Da equação (63) obtemos

$$S = i^*\left[\sum_{k=0}^{m-2} e(k)\cdot S - A\right] \Leftrightarrow S = \frac{-i^*(1+i)^{-1}RA}{1 - i^*\sum_{k=0}^{m-2} e(k)} \tag{5}$$

ou seja, obtemos (70).

Utilizando este resultado e a equação (54) do Capítulo III obtemos

$$E[C_\infty] = CN + \sum_{k=0}^{m-1} E[(GP)_\infty]\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = CN + \frac{m}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} E[(GP)_\infty] \tag{6}$$

Da equação (55) do Capítulo III, obtemos

$$E[F_\infty] = RA - E[\overline{RA}_\infty] = RA - E[(GP)_\infty]\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ddot{a}_{\overline{m-k|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = RA(1 + \frac{i^*(1+i)^{-1}}{1 - i^*\sum_{k=0}^{m-2} e(k)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ddot{a}_{\overline{m-k|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}) =$$

$$RA\left[1 - i^*\sum_{k=0}^{m-2} e(k) + i^*(1+i)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ddot{a}_{\overline{m-k|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}\right] \bigg/ (1 - i^*\sum_{k=0}^{m-2} e(k))$$

A equação (71) resulta se

$$(1+i)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\ddot{a}_{\overline{m-k|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{a_{\overline{m-1-k|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}\sum_{k=0}^{m-1}\left(a_{\overline{m-k|}} - a_{\overline{m-1-k|}}\right) =$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}\sum_{k=0}^{m-1}(1+i)^{-m+k} = \frac{a_{\overline{m|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = (1+i)^{-1}$$

3.1.2. Vamos assumir condições iniciais arbitrárias.

O primeiro termo da equação (67)

$$\widetilde{R}(z)=\frac{\left[(GP)_0+i^*z^{-1}\widetilde{Q}(z)\right]}{1-i^*z^{-1}\widetilde{e}(z)}=\widetilde{P}(z)\left(1-i^*z^{-1}\widetilde{e}(z)\right)^{-1}$$

corresponde ao efeito das condições iniciais em $E[(GP)_t]$. Vamos mostrar que se $\left|i^*\right|<\left(\sum e(j)\right)^{-1}$ então $\lim\limits_{t\to\infty}R_t=0$ ou seja que se aplica o resultado obtido em 3.1.1.

$$\widetilde{R}(z)=\widetilde{P}(z)+\widetilde{P}(z)i^*z^{-1}\widetilde{e}(z)+\widetilde{P}(z)i^{*2}z^{-2}\widetilde{e}(z)^2+\ldots=$$

$$=\widetilde{P}(z)+Z\left[(P*e)(t-1)\right]i^*+Z\left[(P*e)(t-2)\right]i^{*2}+\ldots$$

o que implica que

$$R_t=P(t)+i^*(P*e)(t-1)+i^{*2}(P*e^{(2)})(t-2)+\ldots \tag{7}$$

Definindo $\|P\|=\sup\limits_t|P(t)|$ e tendo em conta o resultado (4) obtemos

$$\left|(P*e^{(n)})(t)\right|=\left|\sum_j P(t-j)e^{(n)}(j)\right|\le\|P\|\sum_j e^{(n)}(j)=\|P\|\left(\sum_j e(j)=\right)^n$$

Do resultado (7) e (6) verificamos a existência de $\{t_n\}_{n\ge1}$, tal que

$$t\ge t_n\Rightarrow|R_t|\le\sum_{j\ge n}\|P\|\left|i^{*j}\right|\left(\sum e(j)\right)^j=\|P\|\left(\sum_{j\ge n}B^j\right)$$

com $B<1$.

Então $R_t\le\dfrac{\|P\|\left|i^*\sum\limits_{j\ge n}e(j)\right|}{1-\left|i^*\right|\sum\limits_{j\ge n}e(j)}$ com $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|P\|\left|i^*\sum\limits_{j\ge n}e(j)\right|}{1-\left|i^*\right|\sum\limits_{j\ge n}e(j)}=0$ o que significa que $\lim\limits_{t\to\infty}R_t=0$.

3.2. Proposição 20

i) A demonstração fica simplificada depois da demonstração da proposição 17 porque $Var\left[(GP)_t\right] \geq 0$. Seja $\|A\| = \sup_t |A_t|$, o resultado (4) implica que para algum $n \geq 1$, se obtêm

$$\sum_{j=0}^{t-n} e_2^{(n-1)}(j)^2 A(t-n-j) \leq \sum_{j \geq 0} e_2^{(n-1)}(j)\|A\|^2 = \left[\tilde{e}_2(1)\right]^{n-1}\|A\|^2$$

Mas utilizando o resultado da proposição 18 podemos dizer que

$$\sup_t V_t \leq \sigma^2\|A\|^2 + \sigma^4\tilde{e}_2(1)\|A\|^2 + \sigma^6\tilde{e}_2(1)^2\|A\|^2 + \ldots = \frac{\sigma^2\|A\|^2}{1-\sigma^2\tilde{e}_2(1)} < \infty$$

Aplicando limites a ambos os membros da equação (76) obtemos

$$\liminf_t V_t \geq \frac{\sigma^2 A^2}{1-\sigma^2\tilde{e}_2(1)}$$

$$\limsup_t V_t \leq \frac{\sigma^2 A^2}{1-\sigma^2\tilde{e}_2(1)}$$

e portanto $V_t = \dfrac{\sigma^2 A^2}{1-\sigma^2\tilde{e}_2(1)}$, ou seja obtemos que equação (80). As outras equações obtêm-se rapidamente de (55) e (56).

ii) Vamos supor que $\sigma_0^2 \geq \left(\sum_{j \geq 0} e(j)^2\right)^{-1}$. A equação (76) mostra que para t fixo $(GP)_t$ é uma função crescente com σ^2. Então

$$\liminf_t Var\left[(GP)_t\right]\Big|_{\sigma^2=\sigma_0^2} \geq \lim_{\sigma^2 \uparrow \left(\sum_{j\geq 0} e(j)^2\right)^{-1}} Var\left[(GP)_t\right]$$

Mas o segundo membro desta desigualdade não tem limite finito como podemos constatar através da equação (80).

BIBLIOGRAFIA:

Bacinello, A. R. (1988). *A Stochastic Simulation Procedure for Pensions Schemes*. Insurance: Mathematics and Economics 7, 153 - 161

Bowers, N. L., Hickman, J. C., and Nesbitt, C. J. (1976). *Introduction to the Dynamics of Pension Funding*. TSA, XXVIII, 177 - 203

Bowers, N. L., Hickman, J. C., and Nesbitt, C. J. (1979). The *Dynamics of Pension Funding: Contribution Theory*. TSA, 31 , 93 - 119

Bowers, N. L., Hickman, J. C., and Nesbitt, C. J. (1982). *Notes on the Dynamics of Pension Funding*. Insurance: Mathematics and Economics 1 , 261 - 270

Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt (1986). *Actuarial Mathematics*. Library of Congress-in-Publication Data. The Society of Actuaries

Colbran, R. B.. (1982). *Valuation of final salary Pension Schemes*, JIA, 109: 359 - 385

Dominicis, R., Manca, R.., Granata, L. (1991). *The Dynamics of Pension Funds in a Stochastic Environment*. SAS, 2, 118-128

Dufresne, D.. *Comparison of Funding Methods in a Static Environment*.

Dusfrene, D. (1986a). *The Dynamics of Pension Funding*. Ph.D.Thesis, School of Actuarial Science and Statistics. The City University, London (England)

Dufresne, D. (1988). *Stability of Pension Systems when rates of return are random*. Insurance: Mathematics and Economics 8, 71-76

Dusfrene, D. (1988). *Moments of Pension Contributions and Fund levels when rates of return are random*. 535 - 543

Dusfrene (1994). *Mathemátiques des Caisses de Retraite*. Editions Supremum.

Haberman, S. (1992).*Pension Funding with Time Delays. A Stochastic approach*. Insurance: Mathematics and Economics II: 179 - 189

Haberman, S. (1993). *Pension Funding with time delays and autoregressive rates of investment return*. Insurance: Mathematics and Economics 13, 45-56

Haberman. S. (1993): *Pension Funding: The effect of changing the frequency of valuations*. Insurance: Mathematics and Economics , 263-270

Haberman, S. (1994). *Autoregressive rates of return and the variability of pension contributions and fund levels for a defined benefit pension scheme*. Insurance: Mathematics and Economics 14, 219-240

Haberman, S. (1994). *A pension Funding Modelling and Stochastic investement Returns*. Department of Actuarial Science & Statistics. City University: 56 páginas

Haberman, S. and Sung, J. (1993). *Dynamic Approaches to Pension Funding*. Department of Actuarial Science & Statistics. City University: 22 páginas

Haberman, S. and Zimbidis (1993): *Delay, feedbak and variability of pension contributions and fund levels*. Insurance: Mathematics and Economics: 271-285

Letsch, W.,R. *Methods of Financing Pension Plans*, 22nd ICA, Vol 2

Manca, R. ,Volpe, E. *Simulation Models for Dynamic Managment of Pension Funds. 125 - 137*

McGill, D. M. (1984). *Fundamentals of Private Pensions. Pension Research Council.*

O'Brien, T. (1987). *A two-parameter family of pension contribution functions and stochastic optimization.* Insurance: Mathematics and Economics 6, 129 - 134

Shapiro, A.F.(1985).*Contributions to the evolution of pension cost analysis*. The

Sommer, Pedro. *Planos e Fundos de Pensões*.Texto Editora.

Trowbridge, C.L. (1952). *Fundamentals of Pension Funding*. TSA 4:17-43

Winklevoss, H. E. (1977). *Pension Mathematics: with numerical illustrations*. Pension Research Council